Uticaj Erlangovih istraživanja na razvoj Teorije telekomunikacionog saobraćaja

Miodrag R. Bakmaz, *Member, IEEE,* Zoran S. Bojković, *Senior member, IEEE*

***Sadržaj* — U ovom radu se prikazuju osnovni rezultati Teorije telekomunikacionog saobraćaja, koji su šire prihvaćeni u inženjerskoj praksi, a proizilaze iz Erlangovih radova, njegovih osnovnih saobraćajnih formula, njegovog principa statističke ravnoteže, ili su, iz poštovanja prema njemu i njegovom delu, nazvani njegovim imenom. Teorija saobraćaja prati razvoj telekomunikacija više od jednog veka, a svaku tehnološku revoluciju podržavali su sve kompleksniji metodi saobraćajnog inženjeringa, pri čemu su Erlangovi i iz njih direktno proizašli modeli, svojom eksplicitnošću i efikasnošću, obezbeđivali mesto i ulogu pouzdanog sredstva u procesu dizajniranja i planiranja.**

***Ključne reči* — Erlangova formula, gubitak, čekanje.**

I. Uvod

ZADOVOLJSTVO je i prigodan momenat da se prisetimo nekoliko važnijih datuma. Pre više od 60 godina, u oktobru 1946. godine, CCIF (koga je nasledio CCITT, a zatim ITU-T) odlučio je da usvoji 1 Erlang kao internacionalnu jedinicu za intenzitet telefonskog saobraćaja. Pre 90 godina (1917.) objavljen je jedan od najznačajnijih radova iz oblasti Teorije telefonskog saobraćaja čuvenog danskog naučnika, čije je puno ime Agner Krarup Erlang [1, 2], u kojem su izvedene formule gubitaka i zakašnjenja (čekanja). Erlang je publikovao svoj prvi rad sa primenom teorije verovatnoće u rešavanju problema telefonskog saobraćaja, pod nazivom "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations", 1909. godine, dokazujući puasonovsku prirodu raspodele telefonskih poziva i saobraćaja. Takođe, napomenimo da se 1.1.2008. godine navršava 130 godina od njegovog rođenja. Život mu je trajao relativno kratko, do 1929.

Navedene godišnjice, kao i izuzetan Erlangov naučni opus, dovoljan su motiv za realizaciju ideje da se napravi pregled problema i modela na koje su direktan uticaj imali Erlangovi teorijski radovi. Erlangovi rezultati na polju Teorije telefonskog saobraćaja najbolje se reprezentuju preko Prve Erlangove formule (Formula gubitaka, B formula, EBF), Druge EF (Formula čekanja, C formula, ECF) i Treće EF (Interkoneksiona formula, D formula, EDF, objavljena 1920. godine, rad publikovan 1922.). Teorijski radovi Erlanga otvorili su prostor za veliki broj aplikacija. Polazeći od osnovne EBF, razvijena su i široko korišćena sledeća rešenja:

- Opšta EF, koja tretira neordinarne dolazne tokove,
- Proširena EF, koja dopušta da deo neopsluženih zahteva bude ponovljen,
- Generalna EF, koja rešava problem gubitaka obnovljivih tokova (GI, general independent, renewal),
- Integralna EF, validna i za necelobrojne snopove,
- Palm-Jakobeusova formula (PJ), koja je u direktnoj relaciji sa EBF, a izražava verovatnoću zauzeća fiksiranih kanala i gubitke u snopovima sa sekvencijalnim biranjem (gubitke prelivnog saobraćaja).
- Modifikovana PJ formula (MPJ), za slučaj nepotpuno dostupnog snopa,
- Frederiks-Hejvordova formula, pogodna za određivanje gubitaka u slučaju nepuasonovog saobraćaja, itd.

Neposredno po objavljivanju Erlangovog rada sa EBF, objavljen je i Engsetov rezultat istraživanja sistema sa konačnim brojem izvora saobraćaja, koji je takođe u Teoriji saobraćaja zauzeo zapaženo mesto [3].

Druga EF izražava gubitke po vremenu u sistemu sa beskonačnim redom i sa eksponencijalnom raspodelom vremena između nailazaka, kao i vremena opsluge (trajanje zahteva). Ovaj pristup je fundamentalan za dalji razvoj modela sistema sa čekanjem, jer se tehnološki razvoj telekomunikacionih i mreža za prenos podataka, od principa komutacije kanala (kola), usmerio ka paketskoj komutaciji, a do izražaja su došli problemi vezani za strategije i discipline čekanja. Razvoj raznih vidova saobraćaja (železnički, drumski, avio, vodni, poštanski), proizvodnje, upravljanja skladištima, uslužnih delatnosti i sl., zahtevao je odgovarajuću matematičku podršku, pri čemu su značajnu ulogu imali modeli sa čekanjem. Naziv Erlang-A formula vezuje se za Palmov osnovni model čekanja sa napuštanjem reda (nestrpljivi korisnici). Moguća je kombinacija EBF i ECF.

Mada se Erlang značajno posvetio pronalaženju adekvatnog rešenja za model sa konstantnim vremenom opsluge, to je elegantnije uspelo Kromelinu, tako da su njegove formule i dijagrami u dugom periodu korišćeni za projektovanje upravljačkih uređaja i za druge potrebe, gde je od značaja bilo to da se pri konstantnom vremenu opsluge mogu postići povoljniji drugi parametri [4].

Treća Erlangova formula proistekla je iz razmatranja snopa sa ograničenom dostupnošću, pri čemu je za kombinatorno homogeno povezivanje (ideal grading) bilo moguće posmatrati sistem preko makrostanja i definisati

M. R. Bakmaz, Saobraćajni fakultet u Beogradu, V. Stepe 305, Srbija (telefon: 3091-314; e-mail: bakmaz@sf.bg.ac.yu).

Z. S. Bojković, Saobraćajni fakultet u Beogradu, V. Stepe 305, Srbija (telefon: 3091-217; e-mail: zsbojkovic@yahoo.com).

za neko stanje verovatnoću nailaska poziva iz grupa sa zauzetim kanalima, odnosno verovatnoću gubitaka. Značaj klasičnih nepotpuno dostupnih snopova se gubi sa uvođenjem digitalne komutacije, a sam princip može se prepoznati čak i kod savremenih ćelijskih sistema, gde se frekvencije, kao resursi, koriste po određenim pravilima. EDF, za razliku od empirijskih formula (O'Dell, MPJ), ima stabilnu teorijsku pozadinu, a moguća je i primena Frederiks-Hejvordovog (Fredericks – Hayward) principa za nepuasonov saobraćaj.

Spisak istraživača koji su se dokazali na polju Teorije telekomunikacionog saobraćaja (Teletaffic theory) i Teorije modela sa čekanjem (Queueing theory, Teorija masovnog opsluživanja) bio bi izuzetno veliki, pa navedimo imena samo nekoliko pionira u ovim oblastima, koji su se pojavili u narednih petnaestak godina posle objavljivanja Erlangovog fundamentalnog rada. To su, sa izvorno pisanim prezimenima, T. O. Engset, G. F. O'Dell, T. C. Fry, E. C. Molina, F. Pollaczek, C.D. Crommelin, C. Palm, A. Kolmogorov, A. Khinchin itd. Godine 1953. D. G. Kendall je uveo A/B/C tip oznake za modele sa čekanjem. Drugu polovinu dvadesetog veka karakteriše izuzetno bogat opus teorijskih radova, koji su pratili dalji razvoj mreža sa komutacijom kanala i paketa, ali i razvoj kompleksnih modela za potrebe drugih vidova saobraćaja, koji su se vrlo često osvrtali ili oslanjali na Erlangove formule.

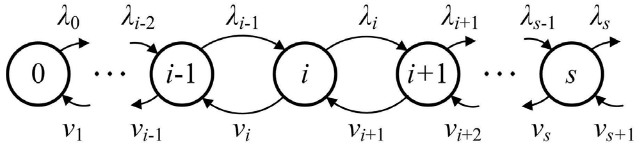
Metode saobraćajnog inženjeringa za potrebe razvoja savremenih mreža (ATM, BISDN, Internet, GSM, UMTS, Bežične, 4G) su vrlo kompleksne, koriste osim Teorije modela sa čekanjem i mnoge druge matematičke discipline (Simulaciju, Operaciona istraživanja, Teoriju grafova), a osnovno merilo saobraćajne efikasnosti, za razliku od klasičnog GoS (Grade of Service), postaje QoS (Quality of Service) [5]. Značaj Erlangovih formula, metoda koje se oslanjaju na njih, kao i slučajnih procesa koji su u teorijskoj osnovi (Puasonov proces, proces "nastajanja i nestajanja" (birth and death), Markovski procesi) je delimično umanjen u korist modela sa raspodelama "dugog repa" (long tailed) autoregresivnih metoda, frakcionalnih procesa. Međutim, u svakodnevnoj inženjerskoj praksi (klasični PSTN saobraćaj, GSM saobraćaj, transportni saobraćaj itd) i organizovanju uslužnih poslova (kontakt centri, bankarske usluge, poštanske usluge, itd.), njihova primena je i dalje značajna.

II. Prva Erlangova formula

Teorijski rezultati Erlanga dobijeni su na bazi principa statističke ravnoteže, a danas se najčešće reprezentuju kao varijante procesa "nastajanja i nestajanja". Razmatra se sistem (grupa kanala, snop, kapacitet) od s kanala (vodova, linija, slotova, servera, resursa, jedinica kapaciteta, jedinica opsega, operatora, agenata), sa tokom zahteva (poziva, korisnika, klijenata, poslova, paketa), kod koga je parametar (jednak intezitetu pri ordinarnom toku) nailazaka λ_i zavisan od stanja sistema i. Raspodela vremena opsluge je eksponencijalna, sa intezitetom opsluge μ, a sistem je sa gubitkom zahteva, kada su zauzeti svi (kod EBF), svi dostupni kanali (EDF), ili je sa mogućnošću čekanja u beskonačno dugačkom redu (ECF). Parametar toka oslobađanja zavisi od parametra eksponencijalne raspodele vremena opsluge i broja zauzetih kanala, odnosno $\upsilon_i = i\mu$ ($\upsilon_i = s\mu$, za $i \geq s$, kod ECF).

Za određivanje verovatnoće stanja zauzeća u sistemu dovoljno je pronaći verovatnoće makrostanja, odnosno verovatnoće zauzeća određenog broja kanala, pri čemu je nebitno koji su kanali zauzeti. Nema značaja ni da li je način pronalaženja slobodnih kanala sekvencijalan, po utvrđenom redosledu, ili slučajan, jer to ne utiče na vrednost gubitka, parametra koji karakteriše opslugu u sistemu.

Pri rešavanju ovakvih problema, uobičajeno je da se za konkretan slučaj predstavi dijagram stanja i prelaza, koji za posmatrani sistem ima oblik kao na Sl. 1.



Sl. 1. Dijagram stanja i prelaza

Na osnovu dijagrama postavlja se sistem linearnih algebarskih jednačina za stacionarne verovatnoće stanja, koji se lako prevodi u rekurentni oblik $v_i p_i = \lambda_{i\text{-}1} p_{i\text{-}1}$, odnosno

$$p_i = p_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{v_{k+1}} . \qquad (1)$$

Da bi se odredila verovatnoća p_0, koristi se normalizacioni uslov za verovatnoće stanja, kojih u sistemu sa gubicima ima s + 1, a u sistemu sa čekanjem ∞. Kao osnovni pokazatelji stepena opsluge koriste se verovatnoća zauzeća svih kanala, odnosno gubitak po vremenu, gubitak zahteva, koji predstavlja odnos intenziteta toka izgubljenih zahteva i srednjeg intenziteta toka ponuđenih zahteva, kao i gubitak saobraćaja.

U skladu sa prethodnim, ako se u (2) parametar λ_i zameni konstantnim parametrom λ, koji ne zavisi od stanja sistema (Puasonov dolazni proces) i uvođenjem oznake za intenzitet ponuđenog saobraćaja $y = \lambda/\mu$ (Čist slučajni saobraćaj tipa I, Pure Chance Traffic Type I, PCT-I), dolazi se do Erlangove (Skraćene Puasonove) raspodele oblika

$$p_i = E_{i,s}(y) = \frac{\dfrac{y^i}{i!}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{s} \frac{y^j}{j!}}, \qquad i = 0, 1, 2, ..., s. \qquad (2)$$

Za gubitak (blokiranje, nagomilavanje, često sa specificiranim značenjem) po vremenu, gubitak poziva i gubitak saobraćaja važi: $b_t = b_c = b_y = p_s = E_s(y) = B(s, y)$, u skladu sa PASTA osobinom (Poisson Arrivals See Time Averages), uz napomenu da su poslednje dve oznake uobičajene za EBF.

Može se dokazati da je EBF, koja je izvedena pod pretpostavkom eksponencijalne raspodele vremena opsluge, važeća za proizvoljnu raspodelu, što se odnosi i na sve klasične potpuno dostupne sisteme sa gubicima. EBF je podržana od strane ITU-T, u preporuci E.520.

Formula (2) nije najpogodnija za numeričko proračunavanje, pošto $s!$ i y^s za veće s dobijaju vrednosti koje premašuju mogućnosti računara. Međutim, za to su podesne rekurzivne formule za verovatnoće stanja

$$p_i = \frac{r_i}{\sum_{j=0}^{s} r_i}, \qquad r_i = \frac{y}{i} r_{i-1}, \qquad r_o = 1, \tag{3}$$

kao i za gubitke u narastajućim snopovima

$$B(i,y) = \frac{yB(i-1,y)}{i + yB(i-1,y)}, \qquad B(0,y) = 1. \tag{4}$$

Sa numeričkog stanovišta, linearna forma je stabilnija i ima oblik

$$I(i) = 1 + \frac{i}{y} I(i-1), \qquad I(0) = 1, \tag{5}$$

gde je $I(i) = 1/B(i, y)$. Ova rekurzivna formula je, čak i za velike vrednosti (s, y), otporna na kumuliranje grešaka. Za vrlo velike vrednosti s postoje efikasniji algoritmi [6].

Moguće je EBF staviti u relaciju prema modelima sa konačnim brojem izvora saobraćaja, pomoću vršnog faktora, koji se definiše kao odnos varijanse i srednje vrednosti verovatnoća stanja, $z = v/m$. Ponuđeni saobraćaj, njegova varijansa, a samim tim i vršni faktor, definišu se na dovoljno velikom snopu, tako da svi ponuđeni zahtevi budu opsluženi. U Erlangovom slučaju to je snop sa beskonačnim brojem kanala, proces nailazaka je Puasonov, koji formira PCT-I ponuđeni saobraćaj sa intenzitetom $m = y = \lambda/\mu$ i vršnim faktorom $z = 1$.

Engsetov slučaj (Skraćena binomijalna raspodela) je sistem sa ograničenim brojem izvora q. Individualni izvori imaju konstantan i jednak parametar dolaznog toka α, kada su slobodni. Kada je i izvora zauzeto, ukupan dolazni proces je zavisan od stanja sistema, dolazni parametar je $\lambda_i = (q - i)\alpha$. Ovaj tip saobraćaja naziva se Čist slučajni saobraćaj tipa II (Pure Chance Traffic type Two, PCT-II). Ponuđeni saobraćaj je $y = q\alpha/(\mu + \alpha) = qa$, varijansa $v = qa(1 + a)$, dok je vršni faktor $z = 1 - a = \mu/(\mu + \alpha) < 1$.

Skraćena Paskalova (Negativna Binomijalna) raspodela takođe ima ograničen broj izvora q. Međutim, ako je u datom trenutku zauzeto i izvora, dolazni parametar je $\lambda_i = (q + i)\alpha$, a vršni faktor, $z = \mu/(\mu - \alpha) > 1$.

Puasonov proces se može dobiti iz beskonačnog broja izvora, uz ograničen ukupni dolazni parametar λ, a Erlangov slučaj može se razmatrati kao specijalan slučaj druga dva slučaja. Tri saobraćajna tipa, EPP (Engset – Puason – Paskal), uključuju sve vrednosti vršnog faktora, $z > 0$ i mogu se koristiti za modeliranje saobraćaja sa dva parametra: srednjom vrednošću y i vršnim faktorom z. Za proizvoljnu vrednost z, broj izvora q generalno postaje necelobrojan [7]. Osnovi parametri performansi za sisteme sa gubicima, b_t, b_c, b_y, kako je već rečeno, jednaki su za Erlangov model, za Engsetov model važi $b_t > b_c > b_y$, dok je za slučaj Skraćene Paskalove raspodele $b_t < b_c < b_y$.

Za slučaj ograničenog broja izvora, PASTA osobinu zamenjuje Generalna teorema nailazaka, po kojoj je verovatnoća stanja sistema posmatranog od strane korisnika (prosek zahteva, call average) jednaka verovatnoći stanja sistema bez tog korisnika (prosek po vremenu, time average), što se odražava na to da je $b_c(q) = b_t(q\text{-}1)$. Engsetova formula se numerički proračunava pomoću rekurzivne formule za stanja sistema, ili preko broja kanala u sistemu, izvedeno na sličan način kao za EBF. Skraćena Paskalova raspodela formalno se dobija iz Engsetove raspodele, odgovarajućom izmenom: q se zamenjuje sa $-q$, a α se zamenjuje sa $-\alpha$ [8].

A. Dvodimenzionalni sistem sa gubicima

Osobina ordinarnosti (zanemarenje verovatnoće da se u kratkom intervalu vremena može pojaviti više zahteva) važna je za eksplicitno rešavanje saobraćajnih modela. Slučaj opsluge stacionarnog neordinarnog (multiple, batch) Puasonovog toka rešava Opšta Erlangova formula, čije izvođenje i oblik mogu da se pronađu u specijalizovanijoj literaturi [9].

Ovde ilustrujmo prostiji praktičan slučaj, kada zahtevi jednog toka zauzimaju po jedan kanal, a zahtevi drugog po dva kanala. Takvu situaciju možemo sresti kod komutacionih čvorova sa internim saobraćajem, ili pri korišćenju po dva ili više kanala za saobraćaj sa većom bitskom brzinom. Proces zauzimanja i oslobađanja kanala je neordinaran.

Bez teškoća se određuje verovatnoća zauzeća i kanala, pri čemu je $i = i_1 + 2i_2$. Ovde i_1 i i_2 predstavljaju broj zahteva u sistemu od pojedinih saobraćaja, sa različitim dolaznim i parametrom opsluge, $a_1 = \lambda_1/\mu_1$ i $a_2 = \lambda_2/\mu_2$, što važi za sopstveni kanalski zahtev, odnosno opseg. Oblik verovatnoće je

$$p_i = \sum_{i_2=0}^{[i/2]} p(i-2i_2, i_2) = p_o \sum_{i_2=0}^{[i/2]} \frac{a_1^{i-2i_2}}{(i-2i_2)!} \frac{a_2^{i_2}}{i_2!}, \tag{6}$$

pri čemu se verovatnoća p_0 dobija na bazi normalizacinog uslova,

$$p_0^{-1} = \sum_{k=0}^{[s/2]} \sum_{j=0}^{s-2k} \frac{a_1^{j-2k}}{(j-2k)!} \frac{a_2^k}{k!}, \tag{7}$$

gde je $[x]$ oznaka celog dela x.

Gubitak za ordinarni tok je $b_1 = p_s$, a za neordinarni $b_2 = p_s + p_{s\text{-}1}$, jer se tada zahtevi gube u stanjima s-1 i s. Ponuđeni saobraćaji za osnovnu jedinicu opsega (jedan kanal) su $y_1 = a_1$ i $y_2 = 2a_2$.

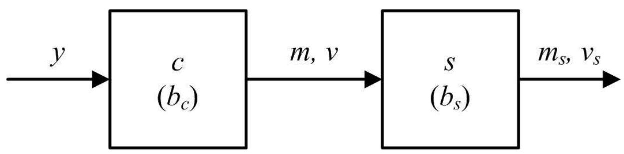
Generalizacija klasične teorije telekomunikacionog saobraćaja je vršena pri razvoju sistema sa integrisanim servisima (ISDN i B-ISDN). Svaka klasa servisa odgovara saobraćajnom toku, a nekoliko njih se opslužuju istim snopom. Klasična višedimenzionalna EBF je primer reverzibilnog Markovog procesa, korišćenog za ove potrebe. Rezultati koje je pružala nisu zadovoljavali slučajeve raznorodnih tokova. Kaufman [10] (i nezavisno Roberts) predložili su mnogo precizniji model, koji omogućuje proračun gubitaka za veliki broj klasa tokova.

Generalniji modeli sa gubicima uključuju zaštitu servisa i multi-slot alokaciju. Razvijeni su konvolucioni, kao i generalizovani algoritam za sisteme sa gubicima [8].

B. Formule direktno izvedene iz EBF

Pri slučajnom biranju, gubitak u nekom kanalu odgovara ukupnom gubitku sistema, odnosno $B(s, y)$, dok je pri sekvencijalnom (uređenom) biranju gubitak u i-tom kanalu $b_i = B(i, y)/B(i\text{-}1, y)$. Pored verovatnoće makrostanja, odnosno verovatnoće zauzimanja j kanala sistema, $p(j)$, često je potrebno odrediti i verovatnoću zauzimanja i određenih, odnosno fiksiranih kanala, H_i. U slučaju snopa sa selektivnim biranjem problem je teže rešiv i zahteva pristup preko verovatnoća mikrostanja. Međutim, kod slučajnog, jednako verovatnog biranja, ta verovatnoće ima oblik $H_i = B(s, y)/B(s\text{-}i, y)$. Ovo je poznata Palm-Jacobaeus (PJ) formula, koja je značajnu primenu imala u Jakobeusovom kombinatornom metodu za određivanje verovatnoće blokiranja višestepenih komutacionih mreža.

PJ formula je poznata i kao metod za određivanje gubitaka pri ograničenoj dostupnosti, kada se gubitak tretira kao verovatnoća zauzeća d fiksiranih kanala, $b_{PJ} = H_d = B(s, y)/B(s\text{-}d, y)$. Postoji više poboljšanja formule, a najpoznatije je Modifikovana PJ formula (MPJ). Kod nje je gubitak fiktivnog saobraćaja $b_{MPJ} = B(s, y_f)/B(s\text{-}d, y_f)$, opsluženi saobraćaj $y_o = y_f\ [1 - B(s, y_f)]$, a stvarni ponuđeni saobraćaj $y = y_o\ /(1 - b_{MPJ})$. Prema prethodnom, fiktivni ponuđeni saobraćaj y_f produkuje opsluženi saobraćaj y_o u potpuno dostupnom snopu s, a stvarni saobraćaj y produkuje isti taj opsluženi saobraćaj u posmatranom nepotpuno dostupnom snopu.



Sl. 2. Osnovni model sa prelivnim saobraćajem

Osnovni model sa prelivnim saobraćajem takođe je klasični primer direktnog korišćenja EBF (Sl. 2). Srednja vrednost prelivnog saobraćaja iz primarnog snopa kapaciteta c i njegov vršni faktor imaju oblike

$$m = yB(c, y), \quad z = \frac{v}{m} = 1 - m + \frac{y}{c + 1 + m - y}\ . \quad (8)$$

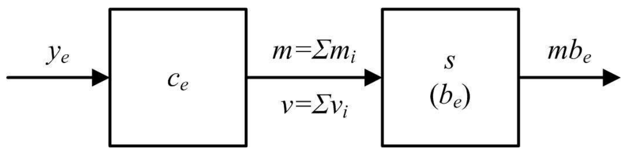
Vršni faktor prelivnog saobraćaja veći je od jedinice i ukazuje na odnos prema Puasonovom saobraćaju, gde je jednak jedinici. Ova saobraćajna osobina odgovara osobini Paskalovog modela.

Gubitak u snopu s dobija se iz PJ obrasca

$$b_s = \frac{m_s}{m} = \frac{B(c+s, y)}{B(c, y)}\ . \quad (9)$$

Srednja vrednost m_s i varijansa v_s izgubljenog saobraćaja u sistemu se dobijaju preko (8), pri čemu se umesto c koristi ukupan broj kanala ($c + s$).

Ako se nekoliko prelivnih saobraćaja opslužuju u zajedničkom snopu, svaki od njih će imati sopstveni, parcijalni gubitak. Ovakav model nema eksplicitno rešenje za verovatnoće stanja i gubitaka, ni za slučaj dva prelivna saobraćaja, pa se sistem jednačina statističke ravnoteže rešava numerički. Radi približnog određivanja opšteg gubitka razvijeno je više metoda, od kojih je najpoznatiji Equivalent Random Method (ERM). Ideja metoda je da se više prelivnih saobraćaja posmatra kao jedan, sa srednjom vrednošću jednakoj sumi srednjih vrednosti i varijansom jednakoj sumi varijansi (ako su saobraćaji nezavisni). Takav saobraćaj je prelivnog tipa i ima sopstveni ekvivalentni primarni snop i ekvivalentni saobraćaj, tako da je rekonstruisan sistem sličan prethodnom (Sl. 3) [11].



Sl. 3. Ekvivalentni model prelivnog saobraćaja

Sada se opšti gubitak može računati kao

$$b_e = \frac{B(c_e + s, y_e)}{B(c_e, y_e)} = \frac{y_e}{m} B(c_e + s, y_e). \quad (10)$$

Osnovni problem je određivanje ekvivalentnih parametara. Za praktične potrebe mogu se koristiti precizni dijagrami. Pogodan način za tačnije proračune je numerički postupak, na bazi interpolacionog metoda, kojim se iz (8) određuju y i c kao ekvivalentni parametri y_e i c_e, na bazi ukupnih m i v. Pri projektovanju klasičnih mreža sa alternativnim rutiranjem, uglavnom su se koristili Repovi (Rapp) obrasci. Prvi predstavlja aproksimaciju za ekvivalentni saobraćaj

$$y_e = mz + 3z(z-1) \quad (11)$$

i na bazi tog rešenja i (8) izvodi se drugi obrazac

$$c_e = y_e \frac{m+z}{m+z-1} - m - 1. \quad (12)$$

Za proračun gubitaka saobraćaja prelivnog tipa, kada je $z > 1$, ali i za saobraćaje sa vršnim faktorom $z < 1$, u upotrebi je Fredericks-Hayward-ov (FH) obrazac, koji je manje tačan, ali je praktičan i zadovoljava potrebe projektovanja i proračuna u kompleksnijim saobraćajnim situacijama. On koristi osobinu manjeg snopa da opslužuje proporcionalno manji saobraćaj sa većim gubicima, sličnu osobini prelivnog saobraćaja u odnosu na Puasonov istog intenziteta, da za veći vršni faktor ima veći gubitak,

$$b_h = B\left(\frac{s}{z}, \frac{m}{z}\right). \quad (13)$$

Videli smo da je rešavanje modela sa saobraćajima koji zahtevaju različit broj kanala (multi-slot, multi-rate) vrlo komplikovano zbog višedimenzionalnih stanja, a imajući u vidu činjenicu da je vršni faktor saobraćaja, koji istovremeno zauzima h kanala, isto toliko puta veći od vršnog faktora saobraćaja dolaznog toka (srednja vrednost je veća h a varijansa h^2 puta), opštiji problem se može uprostiti. Ako saobraćaji srednjih vrednosti m_h, vršnih faktora z_h, zauzimaju promenljivih h kanala, intenzitet ponuđenog saobraćaja je $m = \Sigma h m_h$, vršni faktor $z = \Sigma h^2 m_h z_h / m$, a opšti gubitak po FH obrascu biće $B(s/z, m/z)$.

Razvijen je veliki broj postupaka za tretiranje prelivnog saobraćaja, od Erlangove aproksimacije fiksirane tačke (EFPA), preko metoda više momenata, do korišćenja Isprekidanog Puasonovog procesa kao prelivnog procesa [12]-[15]. Ove teorije postižu svoj vrhunac tokom realizacije mreža sa dinamičkim rutiranjem [16].

C. Određivanje gubitaka u necelobrojnom snopu

Pri korišćenju ERM i FH formula postoji potreba za izračunavanjem gubitaka u necelobrojnom snopu. Problem se uprošćava ako se vrednost snopa s zaokruži na bliži ceo broj $[s]$, a saobraćaj normira sa njihovim odnosom.

Za korektan proračun u necelobrojnom snopu izvedena je Integralna Erlangova formula [6]

$$B(s,y)=\left(y\int_0^\infty e^{-yt}(t+1)^s\right)^{-1}= \\ =\frac{y^s}{e^y\left(\Gamma(s+1)-\gamma(s+1,y)\right)}, \tag{14}$$

gde su: Γ - Gama i γ - nepotpuna Gama funkcija.

Da bi koristili ove formule potrebno je razviti odgovarajući numerički postupak, ili koristiti vrednosti Gama funkcije. Međutim, zadovoljavajuće rezultate daju približni rekurentni obrasci. Najpre se izračuna gubitak za necelobrojni ostatak snopa s - $[s]$, gde je $[s]$ sada celi deo od s, preko polinomske ili eksponencijalne aproksimacije, potom se koristi rekurentni obrazac (4), a do snopa s se dolazi preko necelobrojnog parametra $i = s - [s] + 1, \ldots, s$.

D. Proširena EBF

Prošireni Erlangov B model je zasnovan na istim pretpostavkama kao i osnovni Erlangov model, ali uzima u obzir činjenicu da korisnici mogu da ponove zahtev, ukoliko on nije realizovan. Dodatni parametar r (faktor ponavljanja, Recall Factor) identifikuje procenat zahteva koji se trenutno prikazuje u sistemu, ako je došlo do blokiranja. Proračun se bazira na EBF, ali se sada mora uzeti u obzir porast ponuđenog saobraćaja y_r, kada su gubici $b_r = B(s, y_r)$. Da bi se našla povećana vrednost ponuđenog saobraćaja y_r potreban je iterativni proračun, počevši od $y_0 = y$. Proračun se ponavlja dok se ne postigne ravoteža. Iterativna relacija za dati ponuđeni saobraćaj y_0, broj kanala s i faktor ponavljanja r, je oblika

$$y_i = y_0 + y_{i-1}B(s, y_{i-1})r. \tag{15}$$

Vrednost traženog ponuđenog saobraćaja y_r se dobija i iterativna procedura zaustavlja, kada je y_i aproksimativno jednako y_{i-1}, a izraz $y_{i-1}B(s, y_{i-1})r$ dostigne finalnu vrednost. Za male gubitke povećanje tačnosti je minimalno. Metod daje najdoslednije rezultate za velike gubitke, kada je karakteristična pojava ponavljanja zahteva.

E. Generalizovana EF

Erlangov, Engsetov i Paskalov model pokrivaju slučajeve kada je vršni faktor veći od nule, $z > 0$ i definišu tri vrste gubitaka, koji su kod Erlanga isti. Postoji više saobraćajnih modela i teorija koje pretenduju da nose naziv Generalna EF ili Generalna formula gubitaka. Među njima prednjači rešenje za gubitak zahteva u potpuno dostupnom snopu, za slučaj obnovljivog (renewal, General Independent, GI) dolaznog toka i eksponencijalne raspodele vremena opsluge (model *GI/M/s/s*(0)), čiji je oblik [13]

$$B_g(s,y)^{-1}=\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}C_j^{-1}, \tag{16}$$

gde su koeficijenti

$$C_j=\prod_{i=1}^{j}\frac{\Phi(i\mu)}{1-\Phi(i\mu)},\quad j>0, \qquad C_0=1,$$

μ - intenzitet eksponencijalne raspodele vremena opsluge ($1/\mu$ - srednje vreme opsluge),

y - intenzitet ponuđenog saobraćaja,

$F(t)$ - funkcija raspodele dolaznog toka,

$\Phi(\theta)$ - Laplasova transformacija raspodele $F(t)$.

Formula za gubitak po vremenu ima oblik

$$E_g(s,y)=\frac{yB_g(s,y)\left(1-\Phi(s\mu)\right)}{s\Phi(s\mu)}. \tag{17}$$

Obnovljivi tokovi, pri istim intezitetima, imaju manje (deterministički, uniformni, Erlangov k – tog reda) ili veće (bieksponencijalni, hipereksponencijalni) gubitke u odnosu na eksponencijalnu (Puasonovu) raspodelu, a tu zakonitost prate i varijanse, odnosno vršni faktori, dok za gubitke po vremenu važi obrnuto. Gubitak saobraćaja je jednak gubitku zahteva, tako da ovde razlikujemo samo dva gubitka.

III. Druga Erlangova formula

Sistem sa ponuđenim Puasonovim tokom zahteva, eksponencijalnom raspodelom vremena opsluge i mogućnošću čekanja za opslugu u redu sa beskonačnim brojem mesta (*M/M/s*) predstavlja osnovni model sistema sa čekanjem, jer se jednostavno rešava preko opšteg rešenja za proces sa beskonačnim, ali prebrojivim skupom stanja (1). Naime, situaciju u snopu određuje $s + 1$ stanje, a ostala stanja određuju situaciju u redu za čekanje. Parametar toka oslobađanja kanala za $i > s$ ostaje konstantan, $\upsilon_i = s\mu$, pa se, uz oznaku za ponuđeni saobraćaj $y = \lambda/\mu$ i uslov $y < s$, dolazi do rešenja za p_i.

Gubitak po vremenu, ili verovatnoća čekanja, $b_t = p(W > 0) = C(s, y)$, predstavlja deo vremena u toku koga su svi kanali zauzeti, pa važi

$$C(s,y)=\sum_{i=s}^{\infty}p_i=p_s\frac{s}{s-y}= \\ =\frac{y^s/s!}{1-y/s}p_o=\frac{sB(s,y)}{s-y(1-B(s,y))}. \tag{18}$$

Prethodni izrazi nazivaju se Druga Erlangova formula (Erlang C Formula, ECF), za koju važi $C(s, y) > B(s, y)$. Veza sa EBF može se uspostaviti i na sledeći način

$$J(s)=\frac{1}{C(s,y)}=I(s)-I(s-1)= \\ =\frac{1}{B(s,y)}-\frac{1}{B(s-1,y)}. \tag{19}$$

Za sisteme sa čekanjem moguće je definisati veći broj parametara, poput srednjeg broja zahteva u redu i sistemu, srednjeg vremena čekanja, ili boravka u sistemu, srednjeg vremena u redu za one koji čekaju, raspodele vremena čekanja, verovatnoće čekanja većeg od vremena t i sl.

Erlangov model sa čekanjem je toliko fleksibilan, da se lako mogu razviti na desetine modela, posebno na bazi selekcije korisnika iz reda za čekanje, u skladu sa odgovarajućim principima. Klasične discipline čekanja su:

- FCFS (First Come - First Served), takođe nazvan uređeni red, koji se često preferira u realnom životu. Ovaj slučaj se takođe označava kao FIFO (First In - First Out), što se odnosi samo na red, a ne i na ukupan sistem, pošto, ako ima više od jednog kanala, korisnik sa kratkim vremenom opsluge može prestići korisika sistema koji je pre njega došao u red.
- LCFS (Last Come - First Served) odgovara principu štokovanja (skladištenja). Ova disciplina se takođe označava kao LIFO (Last In – First Out).
- SIRO (Service In Random Order), kada korisnici iz reda imaju istu verovatnoću da budu izabrani za opslugu. Druga skraćenica je RS (Random Selection).

Prve dve discipline uzimaju u razmatranje vreme nailaska, dok treća to ne razmatra i ne zahteva neku memoriju. Kao takva, može se koristiti kod prostijih tehničkih sistema. Za sve ove discipline ukupno vreme čekanja za korisnike je isto. Discipline čekanja određuju raspodelu vremena čekanja po individualnim korisnicima.

U programski kontrolisanim sistemima moguće su mnogo komplikovanije discipline čekanja. Za računarske sisteme od interesa je redukovanje ukupnog vremena čekanja korišćenjem vremena opsluge kao kriterijuma: SJF (Shortest Job First), SJN (Shortest Job Next), SPF (Shortest Processing time First) su discipline koje podrazumevaju da znamo vreme opsluge unapred, što minimizira ukupno vreme čekanja za sve korisnike.

Prethodne discipline razmatraju ili vreme nailazaka, ili vreme opsluge. Kompromis između njih su:

- RR (Round Robin), gde se korisnik opslužuje najduže za fiksirano vreme opsluge (vremenski interval ili slot). Ako opsluga nije kompletirana u toku tog intervala, korisnik se vraća u red, koji je tipa FCFS.
- PS (Processor Sharing), kada svi korisnici dele servisni kapacitet podjednako.
- FB (Foreground – Background) disciplina, koja pokušava da implementira SJF bez saznanja o vremenu opsluge unapred. Server nudi opslugu korisniku koji je dobio najmanji iznos servisa. Kada svi korisnici dobiju isti iznos servisa, FB postaje identičan sa PS.

Navedene discipline su dinamičke i zavise od vremena provedenog u redu. U stvarnosti, korisnici se često dele u prioritetne klase, pa razlikujemo dva tipa prioriteta: nepreventivan (HOL, Head-Of-the-Line) i preventivan. Menjanjem discipline, može se redukovati nagomilavanje.

Sistem sa parametrom napuštanja reda (nestrpljivosti) u (1) ima $\lambda_i = \lambda$ i $v_i = s\mu + (i - s)\theta$, za $i > s$, gde je θ individualni tok nestrpljivosti. Ovo je Palmov $M/M/s+M$ model, sa rešenjem koje se često naziva Erlangova-A formula.

Postoji veliki broj raznih modela sa čekanjem i složenijim raspodelama toka i vremena opsluge. Obično se razmatraju jednokanalni sistemi. Rešavanje sistema sa generalnom raspodelom vremena opsluge, M/G/1, mnogo je kompleksnije, tako da se najčešće zadovoljavamo rezultatima koje podržava Litlova (Little) teorema i formula Polaček – Hinčina (Pollaczek-Khintchine). Slučaj generalno nezavisne raspodele dolaznog toka, GI/G/1, od stalnog je teorijskog interesa i postoji veći broj pristupa rešavanju. Saobraćaj u paketskim mrežama ima "self similar" karakter, pa se za njega koriste modeli sa "long (heavy) tailed" raspodelama (Pareto, hipereksponencijalna, Vejbulova, log-normalna), ili autoregresivni modeli.

U sistemima prenosa podataka vreme opsluge je transmisiona potreba. Zadatak je da se prenese k informacionih jedinica. Kapacitet sistema s predstavlja brzinu signala podataka (bit/s). Vreme opsluge u tom slučaju je k/s. Ako je parametar nailaska zahteva λ, iskorišćenje sistema je $\rho = \lambda k/s$, manje od jedan.

A. Kombinovani BC model

Razmotrimo sistem u kome će jedan deo zahteva, koji se ne prihvate na opslugu, (1 - R), biti izgubljen, a drugi deo (R) upućen na čekanje. Ovde će parametar prelaska u više stanje sistema, za stanja $i \geq s$, biti $R\lambda$, a formula za gubitak po vremenu, poput (18), dobiće oblik

$$b_t = BC(s, y) = \frac{sB(s, y)}{s - Ry(1 - B(s, y))}. \qquad (20)$$

Za gubitak zahteva imali bi $b_y = (1 - R)BC(s, y)$, dok je opsluženi saobraćaj $y_o = y - (1 - R)yBC(s, y) = y(1 - b_y)$.

Ponašanje saobraćajnih parametara ovog sistema je u granicama ponašanja parametara Erlangovih sistema sa gubicima i sa čekanjem. Napomenimo da bi ovakvim modelom mogao uprošćeno da se tretira fenomen ponavljanja zahteva, koji se u literaturi rešava preko višedimenzionalnih i višefaznih modela. Pri $R = 0$, model postaje klasičan sistem sa gubicima, a pri $R = 1$, sistem sa čekanjem (EBF, ECF). Jasno je da se može uvesti i faktor R_i, koji zavisi od stanja sistema, pri $i \geq s$.

IV. Treća Erlangova formula

Do rešenja za idealno simetričan snop dostupnosti d i kapaciteta s, pri Puasonovom dolaznom toku sa parametrom λ, ravnomerno i slučajno raspodeljenom po ulazima, pri eksponencijalnoj raspodeli vremena opsluge sa parametrom μ, može se takođe doći preko verovatnoća makrostanja i opšteg rešenja jednodimenzionalnog procesa "nastajanja i nestajanja" (1). Prelaz iz stanja d u stanje d + 1 moguć je u slučaju da zahtev potiče od izvora saobraćajne grupe u kojoj nije zauzet bar jedan od d dostupnih kanala. Ako se sa γ_i obeleži uslovna verovatnoća gubitka zahteva, kada je zauzeto $i \geq d$ izlaza, parametar zahteva na opsluzi ima oblik

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq i < d, \\ \lambda(1 - \gamma_i), & d \leq i < s. \end{cases} \qquad (21)$$

Verovatnoća gubitka se dobija preko izraza za potpunu verovatnoću,

$$b_c = \sum_{i=0}^{s} \gamma_i p_i \, , \qquad (22)$$

tako da je njen krajnji oblik

$$b_c = \frac{\sum_{i=d}^{s} \gamma_i \frac{y^i}{i!} \prod_{k=d}^{i-1} (1 - \gamma_k)}{\sum_{j=0}^{s} \frac{y^j}{j!} \prod_{k=d}^{j-1} (1 - \gamma_k)}, \qquad (23)$$

$$\prod_{k=d}^{x} (1 - \gamma_k) \equiv 1, \quad x < d .$$

Za idealno simetričan snop, kad je slučajno zauzeto $i \geq d$ izlaza, broj blokiranih grupa je $\binom{i}{d}$. Verovatnoća da će, pri tom stanju, zahtev naići preko neke od grupa gde su svi izlazi zauzeti je $\gamma_i = \binom{i}{d} \Big/ \binom{s}{d}$. Uvođenjem ovog, izraz (23) postaje Erlangova formula gubitaka za idealno simetričan nepotpuno dostupan snop, odnosno Treća Erlangova formula (Erlang D formula, EDF), kada se, umesto oznake b_c, koristi oznaka $B_{s,d}(y)$, ili $D(s, y, d)$.

Napomenimo da se, korišćenjem Frederick-Hayward tehnike, EDF može primeniti u slučaju opsluge nepuasonovskog saobraćaja u nepotpuno dostupnom snopu, kada formula dobija oblik $D(s/z, m/z, d/z)$.

V. Zaključak

Erlangov teorijski pristup saobraćajnim problemima preko statističke ravnoteže, kao i eksplicitna rešenja, imali su presudni uticaj na razvoj Teorije telekomunikacionog saobraćaja poslednjih 90 godina. Do pre petnaestak godina rešenja modela zasnovanih na procesima sa zavisnošću u kratkom opsegu (Markovi procesi, Regresioni modeli) bila su dominirajuća. Suštinskom analizom paketskog saobraćaja (TELNET, FTPDATA, INTERNET) došlo se do zaključaka da se ne može zanemariti njegovo fraktalno, odnosno "self-similar" svojstvo. Za predstavljanje ovog saobraćaja koriste se modeli sa zavisnošću u dugom opsegu (FARIMA, Braunovo kretanje) i sistemi opsluge sa raspodelama "dugog repa" [15] - [19]. Što se Erlangovog pristupa tiče, on je interesantan za razne konekcione situacije, za GSM, inženjering GPRS/EDGE mreža, UMTS, za dimenzionisanje SDH/WDM višeslojnih mreža, optičkih pristupnih mreža, distribuiranih "video na zahtev" sistema [20], [21] i sl.

Modeli izloženi u ovom radu su višestruko korišćeni, obezbedili su svoje mesto u oblastima saobraćajnog inženjeringa, ali i u drugim saobraćajnim disciplinama i situacijama. Na Internetu postoji veliki broj interaktivnih programa koji omogućuju iznalaženje saobraćajnih parametara po Erlangovim formulama, ili formulama koje proizilaze iz njih, a koje su dobrim delom ovde izložene.

U radu navedene reference predstavljaju samo neznatni deo materijala koji sadrže teme vezane za Erlangov teorijski pristup, ili mu oponiraju. Izvorni Erlangovi radovi iz oblasti telefonskog saobraćaja, kao i neki iz drugih matematičkih oblasti (objavio ih je preko 30), iz perioda 1906. - 1930. godine, mogu se pronaći u [2].

Literatura

[1] A. K. Erlang, "Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges," *The Post Office Electrical Engineers Jurnal*, 10, 1918, pp. 189–197. Translated from *Elektroteknikeren*, vol 13, 1917, p.5 (in Danish).

[2] E. Brockmeyer, H. L. Halstrøm and A. Jensen, "The life and works of A. K. Erlang," *Transactions of the Danish Academy of Technical Sciences*, No. 2, Copenhagen 1948, pp. 277.

[3] T. O. Engset, "Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Bestimmung der Wählerzahl in automatischen Fernsprechämtern," *Elektrotechnische Zeitschrift*, 1918, Heft 31. Translated to English in *Telektronikk* (Norwegian), June 1991, 4pp.

[4] C. D. Crommelin, "Delay probability formulae when the holding times are constant," *Post Office Electrical Engineers Journal*, Vol. 25, 1932, pp. 41–50.

[5] D. L. Jagerman, "Some properties of the Erlang loss functions," *Bell Syst. Techn. J.*, 53, No 3, 1974.

[6] K. R. Rao, Z. S. Bojkovic, *Packet video communications over ATM networks*, Prentice Hall, PTR, NY, USA, 2000.

[7] V. B. Iversen, B. Sanders, "Engset formulæ with continuous parameters - theory and applications," *AEU, International Journal of Electronics and Communications*, Vol. 55, 2001, pp. 3-9.

[8] ITU–D, Handbook: *Teletraffic Engineering*, Study Group 2, Question 16/2, Revised Juni 2006.

[9] M. A. Шнепс, *Системы распределения информации, Методы расчёта*, Связь, Москва, 1979.

[10] J. Kaufmann, "Blocking in a shared resources environment", IEEE Trans. on Communications, vol. Com-29, 1981, pp. 1474–1481.

[11] J. R. Wilkinson, Theories for toll traffic engineering in the USA, Bell System Technical Journal, 1956., vol. 35, No 2, pp. 421-514.

[12] A. Kuczura, "The Interrupted Poisson Process as an Overflow Process," *Bell Syst. Techn. J.*, No 3, 1973.

[13] A. Kuczura, D. Bajaj, "A method of moments for the analysis of a switched communication network's performance," *IEEE Trans. on Communications*, Vol. Com–25, 1977, pp. 185–193.

[14] H. Akimaru, H. Takahashi, "An Approximate Formula for Individual Call Losses in Overflow Systems," *IEEE Trans. on Communications*, vol. Com-31, No 6, 1983, pp. 808-811.

[15] M. Bakmaz, "Analysis of a model of two overflow traffic components with different serving intensities", International Journal Of Electronics And Communications (AEUE: Archiv fuer Elektronik und Uebertragungstechnik), No 1, January 2006.

[16] G. Ash, *Dynamic Routing in Telecommunications Networks*, McGraw-Hill, 1998, 746 pp.

[17] W. E. Leland et al., "On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version)", *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 2, no. 1, Feb. 1994, pp. 1-15.

[18] V. Paxson, S. Floyd, "Wide-Area Traffic: The Failure of Poisson Modeling", *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 3, no. 3, June 1995, pp. 226-244.

[19] H. Michiel, K. Laevens,"Teletraffic Engineering in a Broadband Era," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 12, Dec. 1997, pp. 2007-2032.

[20] J. Roberts, "Traffic Theory and the Internet", *IEEE Commun. Magazine*, vol. 39, no. 1, Jan. 2001, pp. 94-99.

[21] S. Floyd, V. Paxson, "Difficulties in Simulating the Internet," *IEEE/ ACM Trans. on Networking*, no 4, Aug. 2001, pp. 392-403.

[22] B. Baynat et al., "Towards an Erlang-like law for the Performance Evaluation of GPRS/EDGE Networks with Finite-Length Sessions", *3rd IFIP-TC6 Networking Conference*, Athens, Greece, May 2004.

[23] E. W. M. Wong et al., "A novel method for modeling and analysis of distributed video on demand systems," *Proc. ICC 2005*, Seoul, Korea, May 2005.

Abstract

Basic results of the Teletraffic theory realised in the engeneering praxis, are presented in this paper. They are the results of Erlang's research work, i.e., basic traffic formulae and statistical equilibrium principle. Teletraffic theory deals with the telecommunication development more then 100 years. Each revolution technology was supported by more complex traffic engineering methods, while Erlang's and other methods derived from his models have provided the role of the reilable tool by which investment can be planned.

THE INFLUENCE OF ERLANG'S RESEARCH WORK ON TELETRAFFIC THEORY DEVELOPMENT

Miodrag Bakmaz, Zoran Bojkovic