Funkcija gustine verovatnoće kompozitne faze u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga

Ivo M. Kostić, *Member, IEEE*

***Sadržaj* — Funkcija gustine verovatnoće (*pdf-probability density function*) faze prijemnog signala u formi Furijeovog reda pogodan je alat za analizu ugaono-modulisanih digitalnih signala. U ovom radu dobijeno je novo analitičko rešenje za *pdf* kompozitne faze u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga i aditivnog belog Gausovog šuma. Ilustrovana je primena dobijene *pdf* za izračunavanje srednje verovatnoće greške *M*-CPSK signala.**

***Ključne reči* — *Hoyt* feding, funkcija gustine verovatnoće, kompozitna faza, Furijeovi koeficijenti.**

I. Uvod

BRZE slučajne fluktuacije amplitude prijemnog signala (*fast*/*multipath fading*) opisuju se odgovarajućim statističkim raspodelama. Najčešće se koristi Nakagamijeva-*m* raspodela [1] koja ″pokriva″ vrlo širok raspon fluktucija od ekstremno dubokih (u slučaju jednostranog normalnog fedinga) do ekstremno plitkih (slučaj Rajsovog fedinga sa jakom LOS (*line-of-sight*) komponentom). Pomenuto opredelenje za Nakagamijevu raspodelu motivisano je prvenstveno određenim analitičkim pogodnostima koje se ostvaruju kada se ista koristi za analizu performansi radio-sistema pri složenim kanalskim i/ili modulacionim scenarijima. Posmatrano sa stanovišta fizičkih procesa u radio-kanalu i statističkih karakteristika odgovarajućih amplitudskih fluktuacija, situacija je znatno komplikovanija. Naime, Nakagamijeva raspodela, koja se inače karakteriše sa *m*-parametrom ($0.5<m<\infty$), predstavlja pogodnu analitičku aproksimaciju za familiju amplitudskih raspodela, a egzaktno opisuje samo dva fizički utemljena specijalna slučaja - Rejlijev feding (m=1) i jednostrani normalni feding (m=0.5). Takođe, Nakagamijeva raspodela daje egzaktno rešenje i za trivijalni slučaj kada $m\rightarrow\infty$, a odnosi se na kanal bez fedinga. U svim ostalim slučajevima, tj. kada je $1<m<\infty$ Nakagamijeva raspodela predstavlja aproksimaciju Rajsove raspodele, a kada je $0.5<m<1$ Nakagamijeva raspodela predstavlja aproksimaciju *Hoyt*-ove raspodele. Analitički tretman performansi aktuelnih radiokomunikacionih sistema u prisustvu kako Rajsovog tako i *Hoyt*-ovog fedinga mnogo je komplikovaniji (kada je uopšte moguć) u odnosu na tretman na bazi Nakagamijevog fedinga. Imajući u vidu navedeno činjenično stanje osnovano je pitanje koje se odnosi na svrsishodnost analiza na bazi Nakagamijeve raspodele sa jede strane i analiza na bazi Rajsove i *Hoyt*-ove raspodele sa druge strane. Ukratko, odgovor je: u preliminarnim sistemskim analizama u kojima treba proceniti karakter i/ili relativni uticaj pojedinih kanalskih i modulacionih parametara pogodno je i adekvatno opredelenje za analizu na bazi Nakagamijeve raspodele; u sistemskim analizama u kojima je primarna i kritična procena energetskog bilansa radio-linka (tipično, naprimer, za mobilne satelitske sisteme) neophodna je analiza na bazi odgovarajuće egzaktne raspodele - Rajsove ili *Hoyt*-ove. U ovom radu biće generisan statistički alat koji treba da omogući egzaktnu i eksplicitnu analizu aktuelnih digitalnih sistema u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga. *Hoyt*-ovu obvojnicu [2] ima gausovski proces čija je srednja vrednost jednaka nuli, a varijanse međusobno nekorelisanih kvadraturnih komponenti procesa su različite i njihov odnos jednak je q^2. *Hoyt*-ov feding, poznat u literaturi i kao Nakagami-*q* feding, karakterističan je za kanal satelitske veze [3],[4].

Aktuelni digitalni radio-sistemi koriste ugaone (*M-ary* PSK) ili kombinovane ugaone i amplitudske modulacije (*M-ary* QAM). Odgovarajući modulatori/detektori nisu savršeni (posebno to važi za sisteme u kojima je M>4), a i primopredajni radio-trakt nije savršen što dodatno degradira kvalitet prenosa u datom sistemu. Jasno, vezano za kvalitet prenosa, najveći i najneizvesniji problemi potiču iz radio-kanala zbog prisutnog fedinga. Pri tako kompleksnom scenariju, koji zavisi od više parametara (hardverskih i kanalskih), umesto uvek moguće i vremenski zahtevne simulacione analize, pogodno je da se otvori put za eksplicitno analitičko rešenje problema. U [5]-[7] (videti i reference uz te radove) pokazano je da je to moguće ako se raspolaže sa funkcijom gustine verovatnoće (*pdf- probability density function*) kompozitne faze na ulazu u detektor. Pomenuta *pdf* treba da je u obliku Furijeovog reda. Zato, osnovni cilj ovog rada je da se dobije analitičko rešenje za Furijeove koeficijente *pdf* kompozitne faze koja potiče od simultanog uticaja *Hoyt*-ovog fedinga i aditivnog belog Gausovog šuma (*AWGN-Additive White Gaussian Noise*). Koliko je ovom autoru poznato, pomenuti rezultat je nov. Alternativni alat (na bzi *MGF-Moment Generating Function*) za analizu performansi digitalnih sistema u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga može se naći u [8]. Međutim, *MGF* pristup omogućava rešenja u implicitnoj formi i to samo za hardverski savršene sisteme.

I. M. Kostić, Elektrotehnički fakultet u Podgorici, Crna Gora (telefon: 382-81-245 839; e-mail: ivok@cg.ac.yu).

II. ANALIZA

Analitičko rešenje za *pdf* kompozitne faze, Φ, prijemnog signala u prisustvu glatkog *Hoyt*-ovog fedinga i *AWGN* nalazimo tako što usrednjavamo *pdf* faze za *AWGN* kanal po amplitudskoj raspodeli *Hoyt*-ovog fedinga, tj.

$$p(\Phi) = \int_0^\infty p(\Phi|\rho) f(\rho) d\rho \qquad (1)$$

gde je $p(\Phi|\rho)$ uslovna *pdf* faze sume signala i *AWGN*, ρ je trenutni *snr* (*signal-to-noise ratio*) u posmatranom kanalu, $f(\rho)$ je *pdf* trenutnog *snr* u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga [8, (2.11)], tj.

$$f(\rho) = \frac{1+q^2}{2q\rho_0} \exp\left(-\frac{(1+q^2)^2 \rho}{4q^2\rho_0}\right) I_0\left(\frac{(1-q^4)\rho}{4q^2\rho_0}\right) \qquad (2)$$

ρ_0 je srednji *snr* u prisustvu fedinga, parametar q ima vrednost koja je u opsegu između 0 i 1, a $I_0(\cdot)$ je modifikovana Beselova funkcija prve vrste 0-og reda. Smenom q=1 u izraz za *pdf Hoyt*-ovog fedinga [8, (2.10)] lako je utvrditi da se *Hoyt*-ova raspodela svodi na Rejlijevu raspodelu (tj., *pdf* u (2) svodi se na eksponencijalnu raspodelu), a ako je q=0 asimptotskom analizom može se utvrditi da se *Hoyt*-ova raspodela svodi na jednostranu normalnu raspodelu. Dakle, *Hoyt*-ova raspodela se odnosi na vrlo duboke fluktacije prijemnog signala (između Rejlijevog fedinga i u graničnom slučaju jednostranog normalnog fedinga).

Analitički oblik za $p(\Phi|\rho)$ zahteva poseban komentar. Prvo, shodno osnovnom cilju formulisanom u Uvodu, $p(\Phi)$ treba da bude u obliku Furijeovog reda. To se najednostavnije može ostvariti ako $p(\Phi|\rho)$ ima oblik

$$p(\Phi|\rho) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\rho) \cos n\Phi, \ |\Phi| \le \pi, \qquad (3)$$

gde je $a_n(\rho)$ Furijeov koeficijent za *pdf* faze sume sgnala i AWGN pri *snr* jednakom ρ. Drugo, u literaturi su raspoloživa tri ekvivalentna, ali međusobno formalno različita zapisa za koeficijent $a_n(\rho)$; prvi zapis je na bazi konfluentne hipergeometrijske funkcije sa negativnim argumentom [9, (3.91)], drugi zapis je na bazi konfluentne hipergeometrijske funkcije sa pozitivnom argumentom [10, (3)], i treći zapis je na bazi modifikovane Beselove funkcije μ-og reda [11]. Na osnovu više analitičkih eksperimenata pri rešavanju integrala u (1), koristeći ponaosob svaku od tri pomenute forme zapisa za $a_n(\rho)$, koliko je ovaj autor mogao da utvrdi, jedino $a_n(\rho)$ zapisan na bazi modifikovane Beselove funkcije μ-og reda omogućava eksplicitno rešenje integrala u (1). Dakle, dalje radimo sa $a_n(\rho)$ čiji je zapis:

$$a_n(\rho) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \left[I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\rho}{2}\right) + I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\rho}{2}\right) \right] \qquad (4)$$

(napomena: zapis u (4) uključuje i korekciju štamparske greške koja postoji u [11, (5)]).

Smenom (3) u (1) dobijamo

$$p(\Phi) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\rho_0) \cos n\Phi, \ |\Phi| \le \pi, \qquad (5)$$

gde je

$$b_n(\rho_0) \triangleq \int_0^\infty a_n(\rho) f(\rho) d\rho \qquad (6)$$

Furijeov koeficijent kompozitne faze signala u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga i *AWGN*. Smenom (2) i (4) u (6) dobijamo

$$b_n(\rho_0) = \frac{1+q^2}{2q\rho_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} J \qquad (7)$$

gde je

$$J \triangleq \int_0^\infty \rho^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\left(\frac{1}{2} + \frac{(1+q^2)^2}{4q^2\rho_0}\right)\rho\right) \cdot \left(I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\rho}{2}\right) + I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right) I_0\left(\frac{(1-q^4)\rho}{4q^2\rho_0}\right) \qquad (8)$$

Očigledno, integral J=J_1+J_2, gde su J_1 i J_2 integrali međusobno istog oblika , ali je $J_1 \neq J_2$. Radi preglednosti i da bi $J_{1(2)}$ prepoznali kao tablične integrale [12, tom II, (2.15.20.2)] uvodimo sledeće oznake:

$$\alpha - 1 \triangleq 1/2; \ p \triangleq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1+q^2)^2}{2q^2\rho_0}\right); \mu \triangleq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & za \ J_1 \\ \dfrac{n+1}{2} & za \ J_2 \end{cases}$$

$$b \triangleq 1/2; \quad \nu \triangleq 0; \qquad c \triangleq \frac{1-q^4}{4q^2\rho_0}$$

Lako je proveriti da je $p > b+c$ što dozvoljava primenu [12, tom II, (2.15.20.2)]. Shodno [12, tom II, (2.15.20.2)] postoje dve varijante oblika rešenja za $J_{1(2)}$.

Prva varijata.

$$J_{1(2)} = \frac{b^\mu}{2^\mu p^{\alpha+\mu}} \frac{\Gamma(\alpha+\mu)}{\Gamma(\mu+1)} \cdot F_4\left(\frac{\alpha+\mu}{2}, \frac{\alpha+\mu+1}{2}; \mu+1, 1; \left(\frac{b}{p}\right)^2, \left(\frac{c}{p}\right)^2\right) \qquad (9)$$

gde je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija, a $F_4(\cdot\ , \cdot\ ; \cdot\ , \cdot\ ; \cdot\ , \cdot\ )$ je hipergeometrijska funkcija sa dve promenljive (*Appell*-ova funkcija 4-og reda definisana u [12, tom III, (7.2.4.4)]). Lako je proverti da je (b/p)+(c/p) <1 što garantuje konvergenciju funkcije F_4. Imajući u vidu da je J=J_1+J_2, koristeći (9) i smenom u (7) dobijamo kompaktni analitički izraz za Furijeov koeficijent kompozitne faze prijemnog signala u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga i *AWGN*. Odgovarajuća *pdf* kompozitne faze prijemnog signala definisana je u (5). Softversko rešenje za F4 trnutno je teško dostupno. Međutim, korisno je imati u vidu da se u praktično relevantnim graničnim slučajevima funkcija F_4 bitno pojednostavljuje. Ovde ćemo samo uputiti na formule [12, tom III, (7.2.4.77), (7.2.4.78), (7.3.5.2)]) koje omogućavaju pomenuta pojednostavljenja.

Druga varijata.

$$J_{1(2)} = \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \frac{1}{p^{\alpha+\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+\mu+2k)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \cdot {}_2F_1\left(-k, -\mu-k; 1; \left(\frac{c}{b}\right)^2\right) \left(\frac{b}{2p}\right)^{2k} \qquad (10)$$

Kao i u prethodnoj varijanti i ovde je $J=J_1+J_2$, pa koristeći (10) i smenom u (7) dobijamo drugu varijantu analitičkog izraza za Furijeov koeficijent kompozitne faze prijemnog signala u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga i *AWGN*. Pošto je u praksi $c/b<<1$ i $b/2p<1$ red u (10) brzo konvergira. Pored toga, numerički posao ovde je mnogo jednostavniji jer je funkcija ${}_2F_1$ raspoloživa u softverskom paketu MATLAB. Za potrebe relevantnih asimptotskih analiza (po ρ_0) korisno je imati u vidu da je ${}_2F_1(.\ ,.\ ;.\ ;0)=1$, a za ${}_2F_1(.\ ,.\ ;.\ ;1)$ postoji redukciona formula [12, tom III, (7.3.5.2)].

III. Zaključna razmatranja

Dobijeno rešenje za *pdf* kompozitne faze prijemnog signala u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga i *AWGN* relevantno je sa teorijske i sa praktične tačke gledišta, a komplementarno je sa ranijim autorovim rezultatima [13, (3)] (*pdf* kompozitne faze u prisustvu Nakagamijevog fedinga i *AWGN*) i [10, (6)](*pdf* kompozitne faze u prisustvu gama-Nakagamijevog fedinga i *AWGN*). Tako, u teorijskom pogledu rešenje je prilog statističkoj teoriji telekomunikacija. Praktični aspekt rešenja potenciran je već u Uvodu i bio je prevashodni motiv za ovaj rad. Zato, ovde ćemo dati kratak komentar i neke konkretne sugestije vezano za praktično korišćenje dobijenog rezultata.

Osnovna pogodnost prilikom analize performansi digitalnih sistema na bazi *pdf* faze prijemnog signala predstavljene u obliku Furijeovog reda odnosi se na činjenicu da se analitičke operacije vrše nad kosinusom faze prijemnog signala, a ne nad trenutnom amplitudom ili nad *snr*-om ili nad složenom trigonometrijskom funkcijom. To suštinski pojednostavljuje analizu. S druge strane, to omugućava da se na analitički pregledan način razmatra uticaj nekih kanalskih/hardverskih efekata, a što inače nije moguće ostvariti koristeći altrnatívne analitičke metode.

Dakle, koristeći *pdf* (5) i kombinujući sa metodologijom elaboriranom u [5]- [7] može se dobiti nekoliko novih i praktično relevantnih rezultata za performanse realnih sistema u *Hoyt*-ovom kanalu. U cilju ilustracije, razmotrićemo samo najednostavniji slučaj, tj. srednju verovatnoću greške za savršeni *M*-CPSK u prisustvu *Hoyt*-ovog fedinga i *AWGN*, jer se isti može analitički i numerički uporediti sa rezultatom dobijenim alternativnom tehnikom. Označićemo tu verovatnoću sa P_f. Na osnovu [6] neposredno pišemo:

$$P_f = 1 - \frac{1}{M} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n(\rho_0)}{n} \sin\frac{n\pi}{M} \qquad (11)$$

gde je koeficijent $b_n(\rho_0)$ definisan u (7), a zapisan u obliku koji smo ranije definisali kao "varijanta 1" ili u obliku označenom kao "varijanta 2". Pri izračunavanju izraza (11) broj članova reda je konačan i zavisi od zahtevane tačnosti. S duge strane, *MGF*-metod omogućava analizu jedino za savršeni *M*-CPSK. Naime, koristeći izraz za *MGF Hoyt*-ovog fedinga [8, (2.12)] i primenom istog u [8, (8.23)] nalazimo da je alternativno rešenje za P_f:

$$P_f = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi-\pi/M} \left(1 + \frac{2g_{MPSK}\rho_0}{\sin^2\theta} + \frac{4g_{MPSK}^2\rho_0^2 q^2}{(1+q^2)^2 \sin^4\theta} \right)^{-1/2} d\theta \quad (12)$$

gde je $g_{MPSK}=\sin^2(\pi/M)$. Integral u (12) može se rešiti isključivo numeričkim putem. Pri tome treba voditi računa o očiglednim singularitetima, a što predstavlja poseban problem.

Dalje, korisno je napomenuti da egzaktni rezultat za P_f u *Hoyt*-ovom kanalu možemo uporediti sa rezultatom dobijenim na bazi aproksimacije *Hoyt*-ove raspodele sa odgovarajućom Nakagamijevom raspodelom. U tu svrhu treba koristiti vezu *q*- parametra *Hoyt*-ove raspodele i *m*-parametra aproksimativne Nakagamijeve raspodele [8, (2.25)], pa tako dobijenu vrednost za *m*-parametar uvrstiti u [13, (3)]. Koristeći *pdf* iz ovog rada, slično poređenje moguće je i za sistem koji sadži hardverske nesavršenosti.

Literatura

[1] M. Nakagami, "The *m*-Distribution – A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman, Ed. London: Pergamon Press, 1960, pp.3–36.

[2] R. S. Hoyt, "Probability Functions for the Modulus and Angle of the Normal Complex Variate," *Bell System Technical Journal*, vol. 26, pp.318–359, April 1947.

[3] B. Chytil, "The Distribution of Amplitude Scintillation and the Conversion of Scintillation Indices," *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, vol. 29, pp. 1175–1777, September 1967.

[4] A. Mehrnia and H. Hashemi, "Mobile satellite propagation channel part II—A new model and its performance," in *IEEE Veh. Technol. Conf.(VTC'99)*, Amsterdam, 1999, pp. 2780–2784.

[5] I.M. Kostić, "Uticaj fazne sinhronizacione greške na *MCPSK* u prisustvu Nakagamijevog fedinga", *Konf.ETRAN,* Čačak, 2004., Sveska II, 60-62

[6] I.M. Kostić, "Uticaj hardverskih nesavršenosti na *MCPSK* i *MDPSK* sisteme", *Konf. TELFOR*, Beograd, 2005., rad SPS-4.1

[7] I.M. Kostić, " Uticaj fedinga na raspodelu fazne greške u faznoj petlji", *Konf. TELFOR*, Beograd, 2006., rad 3.14.

[8] M. K. Simon, M. -S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*. Second ed. NewYork, John Wiley&Sons, 2005

[9] B. R. Levin, *Teoretičeskie osnovy statističeskoj radiotehniki*. Moskva, Sovetskoe radio, 1974.

[10] I. M. Kostić, "Composite Phase PDF in Gamma Shadowed Nakagami Fading Channel", *Wireless Person. Commun*., vol. 41, June 2007, pp.465-469.

[11] J. W. Matthews, "On the Fourier coefficients for the phase-shift keyed phase density function," *IEEE Trane. on Inform. Theory*, pp. 337-338, May 1975.

[12] A. P. Prudnikov, Ju. A. Bryčkov, O. I. Maričev, *Integrali i rjady*, Nauka, Moskva, tom II,1983., tom III,1986

[13] I. M. Kostić, " Average SEP for M-ary CPSK with noisy phase reference in Nakagami fading and Gaussian noise", *Europ. Trans. Telecomm.*,vol. 18, No 2, 2007., pp. 109-113

Abstract

The probability density function (pdf) of the received phase in a Fourier series form is a convenient tool in performance analysis of angle modulation schemes. A new expression for pdf of the phase affected by Hoyt fading (Nakagami-*q*) and additive white Gaussian noise is derived. The derived pdf is used to calculate the average symbol error rate of *M*-ary CPSK as an example.

.

COMPOSITE PHASE PDF IN HOYT FADING CHANNEL

Ivo M. Kostić