

Analiza parametara združene funkcije gustine verovatnoće korelisanih Nakagami- m signala

Hana Z. Popović¹, Aleksandra M. Mitić², Dimitrije Č. Stefanović³, Vladimir D. Stefanović⁴

Sadržaj — U ovom radu određena je združena funkcija gustine verovatnoće korelisanih Nakagami- m signala, a zatim je netipičnom numeričkom i grafičkom analizom izučen uticaj pojedinih parametara na tako dobijenu funkciju, odnosno uticaj njihovih vrednosti na neke njene osnovne karakteristike. Specijalno, analiza je sprovedena odvojeno za slučajeve jednako i nejednako distribuiranih Nakagami- m signala. U oba slučaja, variran je koeficijent korelacije signala i parametar dubine fedinga, pa razmatran uticaj ovih promena na svojstva združene funkcije gustine verovatnoće korelisanih Nakagami- m signala. Takođe, određena je i združena kumulativna funkcija, integracijom funkcije gustine verovatnoće.

Glavne reči — koeficijent korelacije, Nakagami- m model kanala, združena funkcija gustine verovatnoće, pdf, združena kumulativna funkcija, cdf.

I. UVOD

NA pouzdanost veze u bežičnim zemaljskim, posebno mobilnim komunikacionim sistemima, značajno utiče pojava fedinga. U sistemima sa višepropagacionim efektom analiza statističkih karakteristika anvelope primljenog signala vrlo je važna u procesu razvoja i planiranja mobilnih radio mreža, kao i u cilju izbora odgovarajuće tehnike prenosa [1, 2]. Često je osim raspodele anvelope primljenog signala potrebno poznavati i raspodelu kvadrata anvelope, raspodelu anvelope zbira ili proizvoda više nezavisnih ili korelisanih signala opisanih odgovarajućom raspodelom.

Najčešće korišćene raspodele u analizi višepropagacionih sistema su: Rejljeva, Rajsova, Nakagami- m , Nakagami- q i Vejbulova raspodela. Primena konkretnog modela uslovljena je specifičnostima propagacionog okruženja. Rejljev model kanala koristi se u situacijama kada ne postoji direktna linija optičke vidljivosti (LOS – Line of Sight) između predajnika i prijemnika, što je tipično za urbana okruženja [3]. U međugradskim zonama i prigradskim oblastima predložen je Rajsov model [3, 4], koji uključuje postojanje los komponente. Variranja trenutne snage primljenog signala

se mogu dosta dobro opisati i Nakagami- m raspodelom, koja u izvesnom smislu predstavlja uopštavanje Rejljevog i Rajsovog modela, pošto se za odgovarajući izbor parametara svodi na Rejljev, odnosno Rajsov model [5, 6]. Vejbulov model daje dosta dobre rezultate prilikom propagacije u urbanim sredinama, što je od posebnog značaja u situacijama kada Rejljev model ne daje zadovoljavajuće rezultate [7]. Analiza funkcije gustine verovatnoće u zavisnosti od relevantnih parametara važna je za pocenu statističkih karakteristika kanala.

Iz razloga opstošti m -raspodele, u radu je analiziran Nakagami- m model kanala. U drugom poglavlju navedene su osnovne karakteristike ovog modela, a zatim je određena združena funkcija gustine verovatnoće kvadrata dve korelisane Nakagami- m promenljive, i to za slučaj identično distribuiranih, kao i za slučaj nejednako distribuiranih korelisanih Nakagami- m signala [6, 8]. Proračun je urađen za razne vrednosti parametra dubine fedinga – m , za različite vrednosti koeficijenta korelacije – ρ , kao i različite odnose snaga – Ω ovih signala [9]. Numerički dobijeni rezultati prikazani su grafički u trećem poglavlju. Analiza rezultata i zaključna razmatranja data su u četvrtom poglavlju, a na kraju rada dat je pregled korišćene literature.

II. NAKAGAMI- M MODEL KANALA

S obzirom da je Nakagami- m slučajni proces definisan kao anvelopa zbira $2m$ nezavisnih Gausovih slučajnih procesa, funkcija gustine verovatnoće Nakagami- m raspodele određena je sa [6, 8]:

$$p_z(z) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m z^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} z^2\right), z > 0, m \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

pri čemu je z nivo primljenog signala, a $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija. Parametar m naziva se parametar dubine fedinga (fading figure) i određen je sa:

$$m = \frac{E^2[z^2]}{\text{Var}[z^2]} \quad (2)$$

dok je parametar Ω koji predstavlja snagu signala definisan sa:

$$\Omega = E[z^2] \quad (3)$$

Za slučaj $m=1$ Nakagami- m raspodela svodi se na Rejljevu, za $m=1/2$ na jednostranu Gausovu raspodelu, dok slučaj $m \rightarrow \infty$ odgovara situaciji kada u kanalu nema efekta fedinga.

Ako je slučajna promenljiva x definisana kao kvadrat

1. Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu, Vojvode Stepe 283, 11000 Beograd, Srbija; (e-mail: hanap@eunet.yu).

2. Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: alekmi@elfak.ni.ac.yu).

3. Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: vule@elfak.ni.ac.yu).

4. Klinički centar Niš, Bulevar dr Zorana Đinđića 48a, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: vlada@my-its.net).

Nakagami- m slučajne promenljive, odgovarajuća raspodela određena je sa:

$$p_x(x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega} \right)^m x^{m-1} \cdot \exp\left(-\frac{m}{\Omega}x\right) \quad (4)$$

što predstavlja funkciju gustine verovatnoće raspodele kvadrata anvelope. Analiza raspodele kvadrata anvelope primljenog signala važna je pri proceni odnosa snaga signal-šum, kao i za primenu različitih tehnika kombinovanja signala kod diverziti prijema, što u literaturi nije dovoljno naglašeno.

Ukoliko su Gausovi slučajni procesi na osnovu kojih se izvodi Nakagami- m raspodela korelisani, odgovarajućom transformacijom promenljivih dobija se združena funkcija gustine verovatnoće korelisanih Nakagami- m promenljivih:

$$p_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(m)(1-\rho)\rho^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{m}{\Omega} \right)^{m+1} (x_1, x_2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m(x_1+x_2)}{\Omega(1-\rho)}\right) \cdot I_{m-1}\left(\frac{2m\sqrt{\rho x_1 x_2}}{\Omega(1-\rho)}\right) \quad (5)$$

pri čemu je $I_n(\cdot)$ modifikovana Beselova funkcija n -tog reda prve vrste, određena sa:

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+n}}{2^{2i+n} \cdot i! \cdot \Gamma(i+n+1)} \quad (6)$$

Zamenom (6) u (5) i definisanjem promenljivih A , B , C i α_i :

$$A = A(m, \rho, \Omega) = \frac{1}{\Gamma(m)(1-\rho)\rho^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{m}{\Omega} \right)^{m+1} \quad (7)$$

$$B = B(m, \rho, \Omega) = \frac{m}{\Omega(1-\rho)} \quad (8)$$

$$C = C(m, \rho, \Omega) = \frac{2m\sqrt{\rho}}{\Omega(1-\rho)} \quad (9)$$

$$\alpha_i = \frac{C^{2i+m-1}}{2^{2i+m-1} \cdot i! \cdot \Gamma(i+m)} \quad (10)$$

dobija se:

$$p_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = A \cdot (x_1, x_2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \exp(-B(x_1+x_2)) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x_1, x_2)^{\frac{2i+m-1}{2}} \quad (11)$$

Integracijom združene funkcije gustine verovatnoće dobija se združena kumulativna funkcija:

$$F_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} dy_1 dy_2 p_{x_1, x_2}(y_1, y_2) = A \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\frac{1}{B} \right)^{2(m+i)} \cdot \gamma(m+i, Bx_1) \cdot \gamma(m+i, Bx_2) \quad (12)$$

gde je $\gamma(\cdot)$ nekompletna gama funkcija određena sa:

$$\gamma(n, z) = \int_0^z x^{n-1} \cdot \exp(-x) dx \quad (23)$$

Za slučaj nejednako distribuiranih korelisanih Nakagami- m signala združena funkcija gustine verovatnoće određena je sa:

$$p_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(m)(1-\rho)\rho^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{m}{\sqrt{\Omega_{x_1}\Omega_{x_2}}} \right)^{m+1} (x_1, x_2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m(x_1+x_2)}{\sqrt{\Omega_{x_1}\Omega_{x_2}}(1-\rho)}\right) \cdot I_{m-1}\left(\frac{2m\sqrt{\rho x_1 x_2}}{\sqrt{\Omega_{x_1}\Omega_{x_2}}(1-\rho)}\right) \quad (14)$$

pri čemu su sa Ω_{x_1} i Ω_{x_2} predstavljene snage nejednako distribuiranih signala.

III. NUMERIČKI RAZULTATI

Uticao relevantnih parametara na združenu funkciju gustine verovatnoće korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala prikazan je grafički, za različite vrednosti koeficijenta korelacije ρ i različite vrednosti parametra dubine fedinga m . Numerički rezultati dobijeni su na osnovu (5), što je prezentovano grafički na odgovarajućim slikama.

Prvo je za fiksnu vrednost parametra dubine fedinga variran koeficijent korelacije u rasponu $\rho = 0.1$ do $\rho = 0.99$, što je prikazano na Sl. 1, 2, 3 i 4.

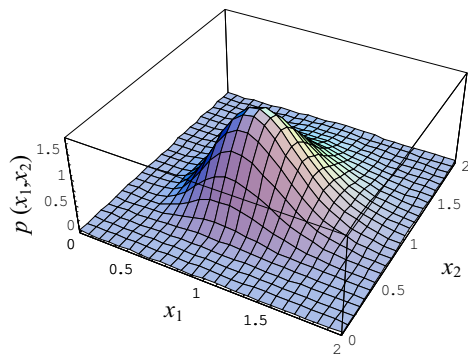
Zatim je za fiksnu vrednost koeficijenta korelacije variran parametar dubine fedinga u rasponu $m = 2$ do $m = 10$, što je prikazano na Sl. 5, 6 i 7.

Nakon toga analizirani su korelisani Nakagami- m signali sa nejednako distribuiranim snagama, za fiksnu vrednost koeficijenta korelacije i parametra dubine fedinga. Numerički rezultati dobijeni na osnovu (14) prezentovani su grafički na Sl. 8, 9 i 10.

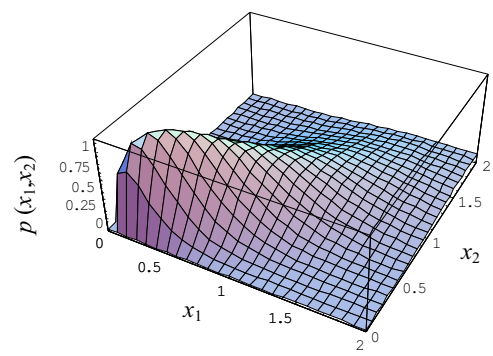
Iz analize 3D grafika združene funkcije gustine verovatnoće korelisanih Nakagami- m signala, za fiksnu vrednost parametra dubine fedinga i varirane vrednosti koeficijenta korelacije, uočava se da maksimumi funkcije leže na horizontalnom dijagonalnom preseku koji je određen pravom $x_1=x_2$, što odgovara jednakim vrednostima amplituda korelisanih Nakagami- m signala. Sa porastom koeficijenta korelacije maksimumi funkcije postaju oštriji i imaju veće vrednosti, što je prikazano na Sl. 1, 2, 3 i 4.

Slično ponašanje uočava se i za slučaj variranja parametra dubine fedinga pri fiksnoj vrednosti koeficijenta korelacije. Maksimumi združene funkcije gustine verovatnoće su takođe locirani na gore pomenutom dijagonalnom preseku, pri čemu se maksimumi dostižu za manje vrednosti amplitude primljenog signala za slučaj manjih vrednosti parametra dubine fedinga, što je prikazano na Sl. 5, 6 i 7.

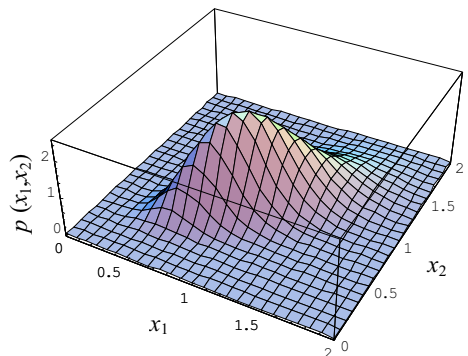
U slučaju nejednako distribuiranih Nakagami- m signala maksimumi združene funkcije gustine verovatnoće su takođe locirani na gore pomenutom dijagonalnom preseku, s tim što se uočava izraženo pomeranje maksimuma duž prave $x_1=x_2$ u zavisnosti od raspodele snage signala, što je prikazano na Sl. 8, 9 i 10.



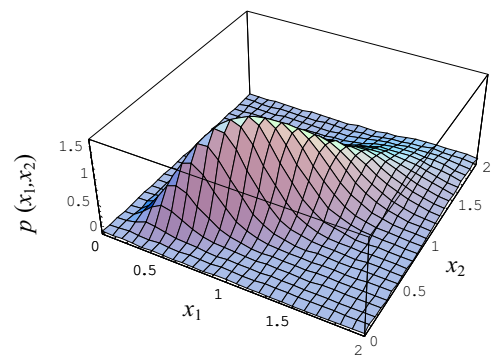
Sl. 1. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.1$



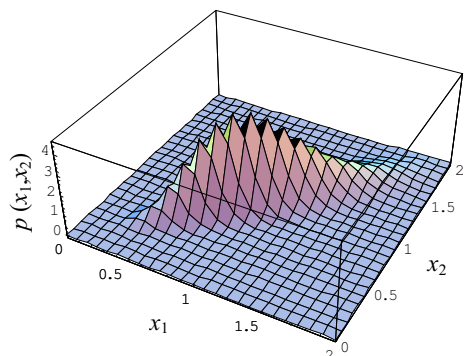
Sl. 5. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=2$, $\rho=0.8$



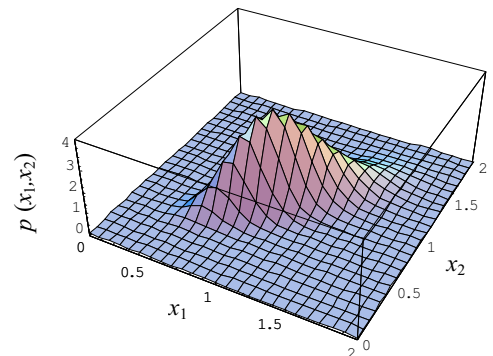
Sl. 2. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.5$



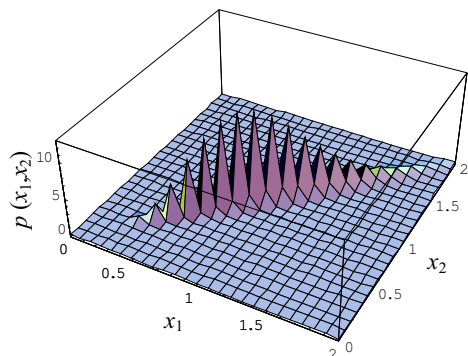
Sl. 6. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=5$, $\rho=0.8$



Sl. 3. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.9$



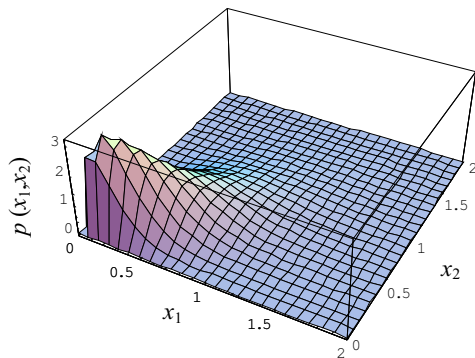
Sl. 7. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.8$



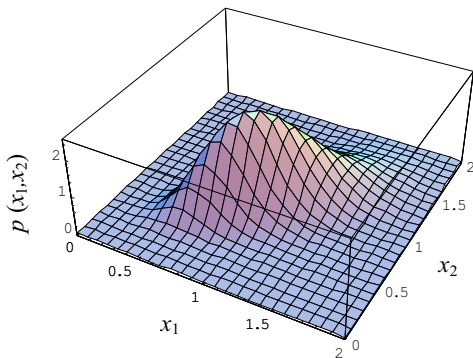
Sl. 4. Združena pdf korelisanih identično distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.99$

IV. ZAKLJUČAK

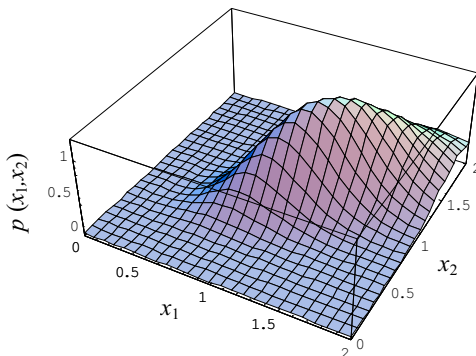
Na osnovu netipične numaričke i grafičke 3D analize združene funkcije gustine verovatnoće korelisanih, kako jednako distribuiranih tako i nejednako distribuiranih Nakagami- m signala, može se zaključiti da je sa stanovišta lokalnih maksimuma ove funkcije najznačajniji horizontalni dijagonalni presek, koji odgovara oblasti jednakih vrednosti amplituda feding signala. S obzirom da izlazi iz okvira ovog rada, detaljna analiza ponašanja maksimuma združene funkcije gustine verovatnoće korelisanih feding signala biće predmet daljih istraživanja.



Sl. 8. Zdužena pdf koreliranih nejednako distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.7$, $\Omega_{x_1}=1$, $\Omega_{x_2}=0.3$



Sl. 9. Zdužena pdf koreliranih nejednako distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.7$, $\Omega_{x_1}=1$, $\Omega_{x_2}=1$



Sl. 10. Zdužena pdf koreliranih nejednako distribuiranih Nakagami- m signala za $m=10$, $\rho=0.7$, $\Omega_{x_1}=1$, $\Omega_{x_2}=2$

LITERATURA

- [1] J. Proakis, *Digital Communications*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1999.
- [2] R. H. Clarke, "A Statistical Theory of Mobile Radio Reception", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 47, pp. 957-1000, 1968.
- [3] R. Price, P. E. Green, "A Communication Technique for Multipath Channels", *Proceedings of the IRE*, pp. 555-70, March 1958.
- [4] M. K. Simon, M. S. Alouni, *Digital Communications over Fading Channels: A Unified approach to performance analysis*, John Wiley, New York, 2000.
- [5] W. Y. C. Lee, *Mobile Cellular Communications*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1989.
- [6] M. Nakagami, *The m-distribution, a General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading in Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. G. Hoffman, Ed. Oxford, England: Pergamon, 1960.
- [7] D. Drajić, *Uvod u statističku teoriju telekomunikacija*, Akademska misao, Beograd, 2003.
- [8] N. Youssef, T. Munakata, M. Takeda, "Fade Statistics in Nakagami Fading Environments", *Proc. IEEE 4th Int. Symp. Spread Spectrum Techniques & Applications*, pp. 1244-47, Mainz, Germany, 1996.
- [9] H. Z. Popović, D. Č. Stefanović, A. M. Mitić, I. D. Stefanović, D. M. Stefanović, "Some Integral Properties of Nakagami- m distribution", *TELSIKS 2007, Proceedings of papers*, Vol.2, pp. 509-512, Niš, Serbia, September 26-28, 2007.

ABSTRACT

In this paper the numerical analysis of pdf-s of square of Nakagami- m signals, for one varying parameter, while the others are set to constant values, is given. Nakagami- m pdf-s are analyzed for different values of fading figure - m , different values of correlation coefficient - ρ and different values of average signal power - Ω . The analysis is given for both of cases: identically distributed and non-identically distributed Nakagami- m signals, and graphic representation of numerical analysis is also given.

Analytical and numerical analysis of statistical properties of pdf-s is very important for the prediction of the system performance. The theoretical analysis of system performance (like Bit-Error-Rate and outage probability) for various modulation techniques, with the different pre-detection and post-detection diversity combining techniques, is based on analysis of pdf properties.

THE ANALYSIS OF JOINT PDF OF CORRELATED NAKAGAMI- M FADING SIGNALS

Hana Popović¹, Aleksandra Mitić², Dimitrije Stefanović³, Vladimir Stefanović⁴