

Direktna sinteza IIR filtera zasnovana na zadatoj specifikaciji amplitudske karakteristike

Vidosav Stojanović, Siniša Minić

Sadržaj—U radu je opisana direktna sinteza rekurzivnih digitalnih filtera sa višestrukom nulom na jediničnom krugu. Karakteristika slabljenja u propusnom opsegu pripada klasi prelaznih Butterworth-Chebyshevjevih filtera. Podešavanjem nule prenosa na jediničnom krugu podešava se minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu.

Ključne reči—Digitalni filteri, direktna sinteza, IIR filteri, prelazni Butterworth-Chebyshevjev filteri.

I. UVOD

Direktna sinteza rekurzivnih digitalnih filtera zasnovana na zadatoj specifikaciji amplitudske karakteristike [1], [2], [3], [4] znatno je složenija od sinteze analognih filtera u s -ravni [5], [6] jer je frekvencijski odziv digitalnih filtera definisan na jediničnom krugu. Dakle, za aproksimaciju zadate amplitudske karakteristike digitalnog filtera treba koristiti polarni koordinatni sistem.

Kvadrat modula amplitudske karakteristike IIR filtera dat je izrazom

$$|H_N(x)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 K_N^2(x)} \quad (1)$$

gde je $K_N(x)$ karakteristična funkcija koja, kao i u slučaju kontinualnih filtera može biti Butterworthov, Chebyshevjev ili neki drugi polinom ili racionalna funkcija, dok je x frekvencijska promenljiva koja za sintezu niskofrekventnih filtera može imati jedan od sledećih oblika

$$x^2 = \sin^2 \frac{\omega T}{2} = \frac{(z-1)^2}{-4z} \quad (2a)$$

$$x^2 = \tan^2 \frac{\omega T}{2} = \frac{-(z-1)^2}{(z+1)^2} \quad (2b)$$

$$x^2 = \sec^2 \frac{\omega T}{2} = \frac{4z}{(z+1)^2} \quad (2c)$$

Za direktnu sintezu IIR filtera treba koristiti prve dve niskofrekvencijske promenljive, dok treća niskofrekvencijska promenljiva ne daje dobre rezultate. Frekvencijska promenljiva (2a) daje prenosnu funkciju koja nema sliku u kontinualnom domenu, dok frekvencijska promenljiva (2b) daje prenosnu funkciju koja ima sliku u kontinualnom domenu.

Ako se usvoji karakteristična funkcija i frekvencijska promenljiva, izračunavanje amplitudske karakteristike je jednostavno, i mogu se odrediti parametri karakteristične funkcije da bi bile zadovoljene zadate specifikacije. Međutim

Vidosav Stojanović, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail vidovav.stojanovic@elfak.ni.ac.yu).

Siniša Minić, Učiteljski fakultet u Prizrenu - Leposaviću, Leposavić, Srbija (e-mail sinisaminic@yahoo.com).

problem nastaje kada treba odrediti prenosnu funkciju, odnosno položaj nula i polova u z -ravni.

U radu će biti opisana direktna sinteza prelaznih Butterworth-Chebyshevjevih IIR filtera sa nulama prenosa na jediničnom krugu. Izraz prelazni Butterworth-Chebyshevjev filteri znači da karakteristika slabljenja u propusnom opsegu filtera varira između Butterworthove (maksimalno ravne) i Chebyshevjeve (mini-max) karakteristike.

Rad je organizovan na sledeći način. Najpre je opisana racionalna karakteristična funkcija koja generiše prelazni Butterworth-Chebyshevjev filter sa konačnom nulom prenosa na jediničnom krugu. Zatim su određeni polovi i nule prenosne funkcije i to kada je za frekvencijsku promenljivu usvojeno $x = \sin(\omega T/2)$. Na kraju je dat primer aproksimacije prenosne funkcije osmog reda.

II. KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

Racionalna karakteristična funkcija prelaznog Butterworth-Chebyshevjevog filtera je data izrazom

$$K_N(x) = x^K P_M(x) \left(\frac{x_z^2 - 1}{x^2 - x_z^2} \right)^L \\ = x^K (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_M x^M) \left(\frac{x_z^2 - 1}{x^2 - x_z^2} \right)^L \quad (3)$$

gde je $N = K + M$ red filtera, M je paran broj, a L je red nule x_z prenosne funkcije koja se nalazi na jediničnom krugu.

Karakteristična funkcija $K_N(x)$ ima sledeće osobine:

- 1) Sve nule polinoma $P_M(x)$ se nalaze u opsegu $|x| < 1$,
- 2) Pol karakteristične funkcije $x = x_z$ se nalazi van intervala $|x| < 1$, tj. $|x_z| > 1$.
- 3) Funkcija $K_N(x)$ oscilira između -1 i $+1$ u opsegu $|x| < 1$.

$$x^K P_M(x_i) \left(\frac{x_z^2 - 1}{x_i^2 - x_z^2} \right)^L = (-1)^i \quad (4)$$

za $i = 0, 1, \dots, M/2$

- 4) $K_N(1) = 1$.
- 5) Karakteristična funkcija ima $M/2 + 1$ ekstremnih tačaka u opsegu $0 < x \leq 1$

$$x_{\frac{M}{2}} < x_{\frac{M}{2}-1} < \dots < x_1 < x_0 = 1 \quad (5)$$

Nepoznati vektor koeficijenata $\mathbf{a} = [a_0, a_2, a_4, \dots, a_M]$, polinoma $P_M(x)$ određuje se rešavanjem sledećeg sistema nelinearnih jednačina

$$F(x) = x^K (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_M x^M) \left(\frac{x_z^2 - 1}{x^2 - x_z^2} \right)^L - (-1)^i = 0 \quad (6)$$

za $i = 1, 2, \dots, M/2 + 1$. Sistem nelinearnih jednačina (6) može se rešiti primenom Newton-Kantorovič iterativnog postupka

$$\mathbf{a}_{v+1} = \mathbf{a}_v - \mathbf{J}^{-1}(x_i) \mathbf{F}(x_i), \quad (7)$$

za $i = 0, 1, \dots, M/2 + 1$, gde je \mathbf{a}_{v+1} rešenje sistema nelinearnih jednačina u v -tom, \mathbf{a}_0 su početna rešenja, a $\mathbf{J}(x)$ je Jacobian matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x_0)}{\partial a_0} & \frac{\partial F(x_0)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial F(x_0)}{\partial a_M} \\ \frac{\partial F(x_1)}{\partial a_0} & \frac{\partial F(x_1)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial F(x_1)}{\partial a_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F(x_M)}{\partial a_0} & \frac{\partial F(x_M)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial F(x_M)}{\partial a_M} \end{bmatrix} \quad (8)$$

gde je

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial a_m} = x_i^{K+M} \left(\frac{x_z^2 - 1}{x_i^2 - x_z^2} \right)^L, \quad (9)$$

za $i = 0, 1, \dots, M/2$ i $m = 0, 2, \dots, M$

Za početna rešenja treba usvojiti koeficijente Chebyshev-ljevog polinoma M -tog reda. Lokalni ekstremumi karakteristične funkcije se određuju selekcijom nula sledećeg polinoma $K + M + 1$ reda

$$(x^2 - x_0^2) \frac{d}{dx} [x^K P_M(x)] + 2LP_M(x)x^{K+1} = 0 \quad (10)$$

Polinom (10) ima $M + K + 1$ nula: M nula u opsegu $|x| < 1$, dve nule u opsegu $|x| > 1$ i nulu $K - 1$ reda u koordinatnom početku. Selekcijom nula koje se nalaze u opsegu $|x| < 1$ dobijaju se početna rešenja za lokalne ekstremume.

U Tabeli 1 dati su koeficijenti karakteristične funkcije osmog reda za $x_z = 1.25$ i $L = 1$. Za $K = 0$ i $M = 8$ dobija se karakteristična funkcija koja ima Chebyshev-ljevu karakteristiku u opsegu $|x| < 1$, dok se za $K = 8$ i $M = 0$ dobija karakteristična funkcija koja ima Butterworthovu karakteristiku.

Tabela 1 Koeficijenti polinoma $P_N(x)$ za $N = 8$, $x_z = 1.25$ i $L = 1$.

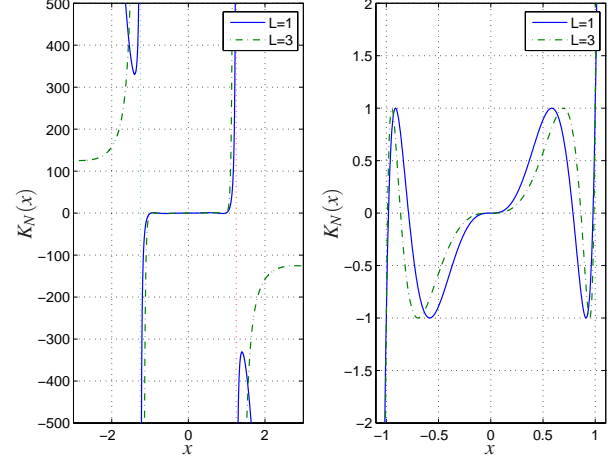
K	0	2	4	6	8
M	8	6	4	2	0
a_0	-2.7778	45.1848	-54.7175	16.6946	-1.00
a_2	73.7778	-244.6148	138.4894	-17.6946	--
a_4	-328.0000	389.8740	-84.7719	--	--
a_6	483.5556	-191.4440	--	--	--
a_8	-227.5556	--	--	--	--

Na Slici 1 prikazana je karakteristična funkcija sedmog reda za $K = 3$, $M = 4$, $x_z = 1.25$ i dve vrednosti L . Na slici levo prikazana je uvećana vrednost karakteristične funkcije u opsegu $|x| < 1$.

III. FREKVENCIJSKA PROMENLJIVA JE $\sin \frac{\omega T}{2}$

Zamenom (3) u (1) dobija se sledeći izraz za kvadrat amplitudske karakteristike IIR filtra

$$H_N(x) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 x^{2K} (b_0 + b_2 x^2 + \dots + b_{2M} x^{2M}) \left(\frac{x_z^2 - 1}{x^2 - x_z^2} \right)^{2L}} \quad (11)$$



Slika 1. Racionalna karakteristična funkcija za $K = 3$, $M = 4$ i $L = 1$ i 3 .

gde su $b_{2i} = \sum_{j=0}^i a_{2j} a_{2i-2j}$, za $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Posle kraćeg računanja dobija se sledeća jednačina

$$H_N(x) = \frac{(x^2 - x_z^2)^{2L}}{(x^2 - x_z^2)^{2L} + c_{2N} x^{2N} + c_{2N-2} x^{2N-2} \dots + c_{2K} x^{2K}} \quad (12)$$

gde se koeficijenti c_{2i} računaju prema sledećoj formuli

$$c_{2i} = (x_z^2 - 1)^{2L} \varepsilon^2 b_{2(i-K)}, \quad i = K, K+1, \dots, N. \quad (13)$$

Zamenom normalizovane vrednosti niskofrekvencijske promenljive (2a) sa $v_p = \sin(\omega_p T/2)$, gde je $\omega_p T$ propusni opseg filtra, u (12) dobija se sledeća funkcija

$$G(z) = \frac{\left[\frac{(z-1)^2}{-4v_p z} - x_z^2 \right]^{2L}}{\left[\frac{(z-1)^2}{-4v_p z} - x_z^2 \right]^{2L} + c_{2N} \left[\frac{(z-1)^2}{-4v_p z} \right]^N + \dots + c_{2K} \left[\frac{(z-1)^2}{-4v_p z} \right]^K}, \quad (14)$$

koja je jednaka kvadratu modula amplitudske karakteristike $|H_N(e^{j\omega T})|^2$ na jediničnom krugu u ravni kompleksne promenljive z

$$G(z) = \frac{z^{N-2L} [z^2 + 2(2\beta - 1)z + 1]^{2L}}{z^{N-2M} [z^2 + 2(2\beta - 1)z + 1]^{2L} + F(z)}, \quad (15)$$

gde je $\beta = \sin^2(\omega_c T/2)$ i

$$F(z) = f_0 z^{2N} + f_1 z^{2N-1} + \dots + f_N z^N + \dots + f_1 z + f_0. \quad (16)$$

Polinom $F(z)$ je "recipročni" polinom jer je zbir recipročnog polinoma reda S i recipročnog polinoma reda T pomnožen sa recipročnim polinomom reda $S - T$, takođe recipročni polinom reda S . Koeficijenti polinoma $F(z)$ izračunavaju se primenom sledeće relacije

$$f_{2N-i} = (-4\alpha)^{2L} \sum_{j=0}^{2N-i} \frac{(-1)^j c_{2(i+j-N)} \binom{2(i+j-n)}{j}}{(-4\alpha)^{i+j-N}} \quad (17)$$

za $i = N, N+1, \dots, 2N$.

Prvi sabirak u imeniocu prenosne funkcije (15) takođe je simetrični polinom koji ima višestruku nulu na jediničnom krugu i može se napisati u obliku polinoma $4L$ -tog reda

$$[z^2 + 2(2\beta - 1)z + 1]^{2L} = z^{4L} + \dots + e_{2L} z^{2L} + \dots + 1, \quad (18)$$

gde se koeficijenti e_i izračunavaju po formuli

$$e_i = \sum_{j=0}^i \binom{2L}{j} \binom{4L-2j}{i-j} (-1)^j (4\beta)^j \quad (19)$$

za $i = 0, 1, 2, \dots, 2L$. Konačno

$$G(z) = \frac{z^{N-2L} [z^2 + (4\beta - 2)z + 1]^{2L}}{g_0 + \dots + g_N z^N + \dots + g_1 z^{2N-1} + g_0 z^{2N}}, \quad (20)$$

gde je

$$g_i = \begin{cases} f_i, & \text{za } i = 0, \dots, N-2K-1 \\ f_i + e_{i-N+2K}, & \text{za } i = N-2K, \dots, N. \end{cases} \quad (21)$$

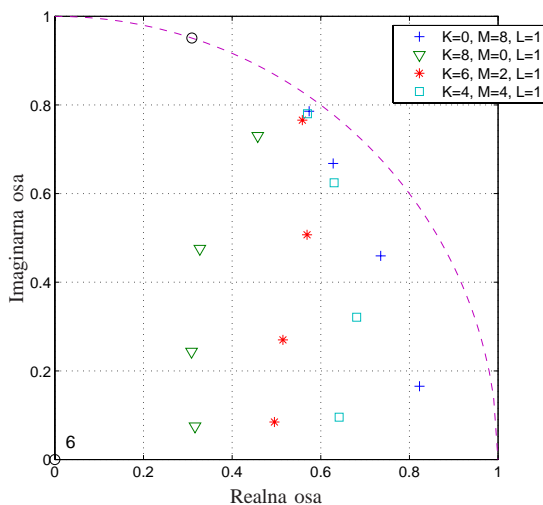
recipročni polinom. Selekcijom polova prenosne funkcije (20) koji se nalaze unutar jediničnog kruga, dobija se prenosna funkcija filtra.

Tabela 2 sadrži položaj polova za fitar osmog reda. Maksimalno slabljenje u propusnom opsegu je $R_p = 1$ dB, propusni opseg je $f_p = 1.5$ kHz, pol slabljenja je na frekvenciji $f_z = 2$ kHz, $L = 1$, frekvencija odmeravanja je $F_s = 10$ kHz. Na osnovu ovih podataka dobija se da je $x_z = \sin(\pi f_z / F_s) / \sin(\pi f_p / F_s) = 1.2947$.

Tabela 2 Položaj polova i nule u z -ravni za prenosne funkcije osmog reda.

	$K=0, M=8$	$K=8, M=0$	$K=6, M=2$	$K=4, M=4$
$\Re_{z_{p1}}$	0.57375	0.45784	0.55841	0.56993
$\pm j\Im_{z_{p1}}$	$\pm j0.78583$	$\pm j0.73038$	$\pm j0.76577$	$\pm j0.78022$
$\Re_{z_{p2}}$	0.62794	0.32711	0.5691	0.62999
$\pm j\Im_{z_{p2}}$	$\pm j0.66796$	$\pm j0.47573$	$\pm j0.5072$	$\pm j0.62448$
$\Re_{z_{p3}}$	0.73507	0.30842	0.51456	0.68106
$\pm j\Im_{z_{p3}}$	$\pm j0.45941$	$\pm j0.24347$	$\pm j0.26983$	$\pm j0.32108$
$\Re_{z_{p4}}$	0.82273	0.31611	0.49535	0.64137
$\pm j\Im_{z_{p4}}$	$\pm j0.16543$	$\pm j0.07485$	$\pm j0.084693$	$\pm j0.09551$

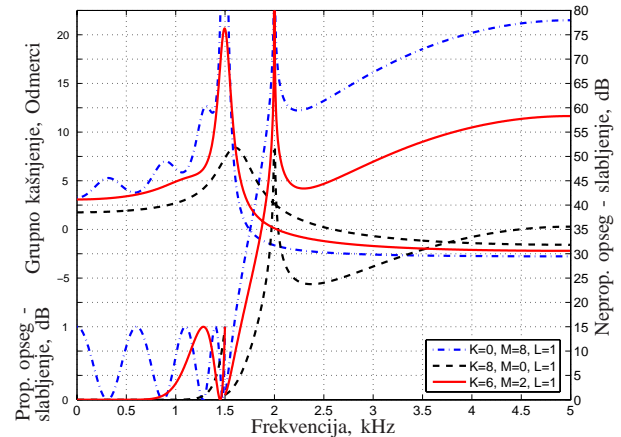
Na Slici 2 prikazan je položaj nula i polova u z -ravni za prenosne funkcije osmog reda čiji se polovi nalaze u Tabeli 2. Radi bolje preglednosti prikazan je samo prvi kvadrant z -ravni. Sve prenosne funkcije imaju konjugovano kompleksni par nula na jediničnom krugu $z_z = 0.30902 \pm j0.95106$, i nulu šestog reda u koordinatnom početku.



Slika 2. Položaj nula i polova za IIR filter osmog reda.

Na Slici 3 prikazane su frekvencijske karakteristike prenosne funkcije osmog reda čiji propusni opseg iznosi $f_p = 1.5$ kHz.

Sve prenosne funkcije imaju pol slabljenja prvog reda na frekvenciji $f_z = 2$ kHz. Kao što se vidi, maksimalno slabljenje u propusnom opsegu iznosi $R_p = 1$ dB.



Slika 3. Frekvencijske karakteristike IIR filtra osmog reda.

Karakteristika slabljenja za $K = 0$ i $M = 8$ ima Chebyshev-ovo slabljenje u propusnom opsegu, dok karakteristika $K = 8$ i $M = 0$ odgovara Butterworthovom slabljenju u propusnom opsegu. Treća prenosna funkcija, $K = 6$ i $M = 2$, ima karakteristike koje se nalaze između ove dve granične vrednosti.

Kao što se vidi na Slici 3, minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu zavisi od karakteristike slabljenja u propusnom opsegu. Najmanju vrednost minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu ima filter sa maksimalno ravnom amplitudskom karakteristikom, a najveću vrednost slabljenja filter sa mini-max karakteristikom slabljenja u propusnom opsegu. Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu iznosi 59.436 dB, 23.751 dB i 43.401 dB za prenosne funkcije osmog reda ($K = 0, M = 8, L = 1$), ($K = 8, M = 0, L = 1$) i ($K = 6, M = 2, L = 1$) respektivno.

IV. SLABLJENJE U NEPROPUSNOM OPSEGU

Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu zavisi od položaja pola slabljenja u nepropusnom opsegu. Za izračunavanje minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu može se koristiti formula (10). Nakon određivanja nula traženo rešenje je nula koja ima najveću vrednost. Za izračunavanje frekvencije na kojoj nastupa minimalno slabljenje koristi se formula

$$f_{ext} = \frac{F_s}{\pi} \arcsin(x_{ext} \sin \frac{\pi f_p}{F_s}) \quad (22)$$

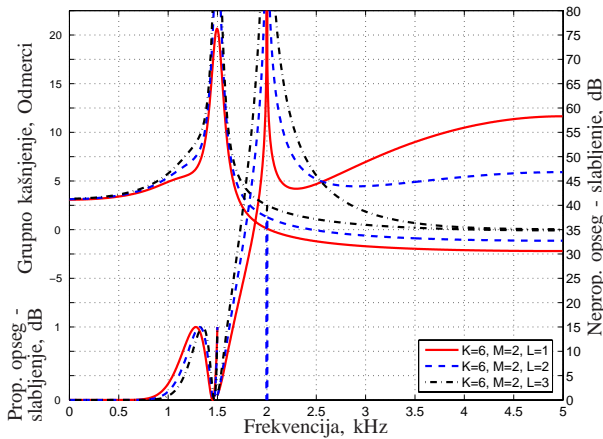
gde je x_{ext} frekvencijska promenljiva pri kojoj nastupa minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu.

Promena frekvencije f_z , na kojoj nastupa pol slabljenja, izaziva promenu kako slabljenja u nepropusnom opsegu, tako i slabljenja u propusnom opsegu. Zbog toga je potrebno primeniti iterativni postupak za postizanje specificirane vrednosti minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu R_s .

Najviša frekvencija pri kojoj nastupa minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu iznosi $F_s/2$, odnosno $x_m = 1/\sin(\pi f_p / F_s)$. Ukoliko je najveće rešenje jednačine (10)

veće od x_m znači da lokalni ekstremum nastupa na frekvenciji $f_{ext} = F_s/2$.

Na Slici 4 prikazane su frekvencijske karakteristike filtra osmog reda za različite višestrukosti pola slabljenja.



Slika 4. Frekvencijske karakteristike IIR filtra osmog reda kada se menja višestrukost pola slabljenja.

Na Slici 4 prikazan je uticaj višestrukog pola na slabljenje u nepropusnom opsegu. Na frekvenciji f koja zadovoljava sledeći uslov

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi f_z}{F_s} - \sin^2 \frac{\pi f_p}{F_s}}{\sin^2 \frac{\pi f}{F_s} - \sin^2 \frac{\pi f_z}{F_s}} = 1, \quad (23)$$

sve amplitudske karakteristike imaju isto slabljenje.

Pored određivanja frekvencije f_z sa kojom se realizuje specificirana karakteristika slabljenja u propusnom opsegu i minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu R_s , potrebno je odrediti i frekvenciju f_s pri kojoj slabljenje u nepropusnom opsegu prvi put dostiže minimalnu vrednost R_s . Frekvencija f_s se nalazi između granične frekvencije propusnog opsega f_p i frekvencije pri kojoj nastupa pol slabljenja f_z .

V. PRIMER

Na Slici 5 prikazan je primer proračuna prenosne funkcije osmog reda koja zadovoljava sledeće specifikacije: propusni opseg je $f_p = 2$ kHz, minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu je $R_s = 40$ dB, maksimalno slabljenje u propusnom opsegu je $R_p = 1$ dB, frekvencija odmeravanja je $F_s = 10$ kHz. Ostali parametri su sledeći: $K = 6$, $M = 2$ i $L = 1$. Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu od $R_s = 40$ dB je dobijeno za $f_z = 2.6340$ kHz. Granična frekvencija nepropusnog opsega je $f_s = 2.5361$ kHz.

Koeficijenti prenosne funkcije su:

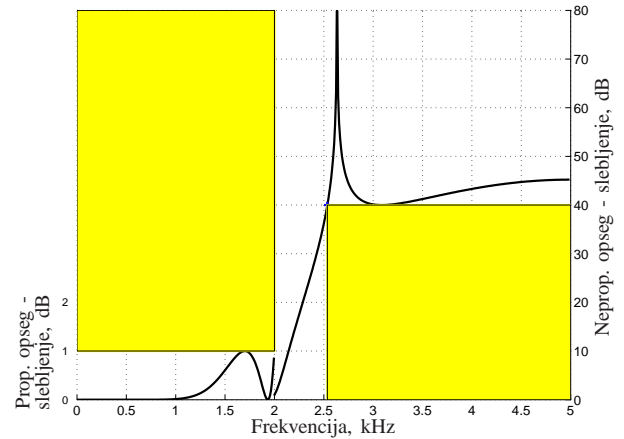
$$a = \begin{bmatrix} 1.0000 & -2.9659 & 5.0298 & -5.5865 & 4.3080 \\ & -2.2998 & 0.8144 & -0.1725 & 0.0165 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.1682 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za sintezu amplitudske karakteristike napisane su sledeće funkcije u programskom paketu MATLAB[®]:

- Generisanje racionalne karakteristične funkcije $[P, N] = \text{BTzEqRipple}(K, M, L, x_z, tol)$

- Izračunavanje minimalnog slabljenja nepropusnom opsegu $[f_{ext}, a_{ext}] = \text{AttExtTyp1}(K, M, L, R_p, P, f_p, f_z, F_s)$
- Izračunavanje prenosne funkcije $[b, a] = \text{LpTBCzTyp1}(K, M, L, eps, f_p, f_z, F_s, P)$



Slika 5. Amplitudska karakteristika filtra osmog reda.

Ove prenosne funkcije nemaju nulu u kontinualnom području. Međutim, ukoliko se frekvencijska promenljiva (2(a)) zameni frekvencijskom promenljivom (2(b)) dobijaju se prenosne funkcije, koje pored višestruke nule na jediničnom krugu, imaju i višestruku nulu u $z = -1$. Ovako dobijene prenosne funkcije imaju sliku u kontinualnom području.

LITERATURA

- C. M. Rader and B. Gold, "Digital filter design techniques in frequency domain," *Proc. IEEE*, vol. 55, pp. 149–171, 1967.
- L. R. Rajagopal and D. Roy, "Optimal design of maximally flat fir filters with arbitrary magnitude specifications," *IEEE Trans. ASSP*, vol. ASSP-37, no. 4, 1989.
- S. Nikolić and V. Stojanović, "Transitional Butterworth-Chebyshev recursive digital filters," *Int. J. Electronics*, vol. 80, no. 1, pp. 13–20, 1996.
- V. Stojanović and S. Nikolić, "Direct design of sharp-cutoff low-pass recursive digital filters," *Int. J. Electronics*, vol. 85, no. 5, pp. 589–596, 1998.
- S. C. D. Roy, "On maximally flat sharp cutoff low-pass filters," *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-19, pp. 58–63, 1971.
- A. Budak and P. Aronhime, "Maximally flat low-pass filters with steeper slopes at scutoff," *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-18, pp. 63–66, 1970.

ABSTRACT

Direct synthesis of the recursive digital filters with multiple zero on the unit circle is presented in this paper. Attenuation characteristic in passband belongs to the transitional Butterworth-Chebyshev filters type. Minimal attenuation in stopband is arranged with transfer function zero on the unit circle.

DIRECT SYNTHESIS OF IIR FILTER BASED ON MAGNITUDE FUNCTION SPECIFICATION

Vidosav Sojanović and Siniša Minić