

Analiza osetljivosti jedne klase varijabilnih dvokanalnih banki IIR filtera

Jelena D. Čertić, *Student Member*, and Ljiljana D. Milić, *Senior Member, IEEE*

Sadržaj — U ovom radu prikazana je detaljna analiza osetljivosti jedne klase varijabilnih komplementarnih dvokanalnih IIR filtera. IIR filtri kojima se ovaj rad bavi zasnivaju se na projektovanju *halfband* FIR prototip filtra linearne faze i IIR prototip filtra. Dobijena dvokanalna banka je *allpass* i *magnitude* komplementarna. Granična frekvencija filtera se može jednostavnom procedurom podesiti na bilo koju zadanu vrednost.

Glavne reči — IIR, komplementarnost, osetljivost, varijabilna granična frekvencija.

I. UVOD

KOMPLEMENTARNA IIR filtera razmatrana u ovom radu zasniva se na strukturi koja se sastoji od filtera svepropusnika povezanih mrežom koeficijenata (*tapped-cascaded interconnection of allpass filters*). Procedura projektovanja za ovu klasu filtera detaljno je prikazana u [1,2]. Takođe je objašnjena prednost ove strukture u pogledu realizacije u odnosu na strukturu zasnovanu na paralelnoj vezi svepropusnika. U ovom radu biće razmatrana prednost ove strukture u pogledu osetljivosti jer je ta analiza od značaja kada se struktura koristi za implementaciju dvokanalnih varijabilnih filtera u aritmetici fiksne tačke. U poglavlju II biće izloženi opšte osobine strukture. U poglavlju III su dati rezultati proračuna osetljivosti. U poglavlju IV dati su ilustrativni primeri. Poglavlje V je zaključak.

II. KOMPLEMENTARNI IIR FILTRI

A. Komplementarnost

Za IIR filtera parove definiše se nekoliko tipova komplementarnosti.

Filtri su komplementarni u smislu svepropusnosti (*allpass* komplementarnost) ako je ispunjen uslov:

$$G(e^{j\omega}) + G_C(e^{j\omega}) = A_{AP}(e^{j\omega}), \quad (1)$$

gde je $A_{AP}(e^{j\omega})$ filter svepropusnik.

Filtri su komplementarni po snazi (*power* komplementarnost) ako je ispunjen uslov:

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |G_C(e^{j\omega})|^2 = 1. \quad (2)$$

J. D. Čertić, Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Srbija (telefon: 381-11-3218348; faks: 381-11-3248681; e-mail: certic@etf.bg.ac.yu).

Lj. D. Milić, Elektrotehnički fakultet u Beogradu i Institut „Mihajlo Pupin“, Volgina 15, 11050 Beograd, Srbija; (e-mail: milic@kondor.imp.bg.ac.yu).

Filtri su komplementarni po amplitudskoj karakteristici (*magnitude* komplementarnost) ako je ispunjen uslov:

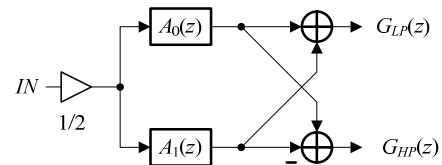
$$|G(e^{j\omega})| + |G_C(e^{j\omega})| = 1. \quad (3)$$

B. Realizaciona struktura tip - 1

IIR filter neparnog reda može da se realizuje kao paralelna veza dva filtera svepropusnika, Sl. 1. Prenosne funkcije filtera propusnika niskih frekvencija (LP) i propusnika visokih frekvencija (HP) dobijaju se na osnovu:

$$G_{LP}(z) = [A_0(z) + A_1(z)]/2, \quad (4a)$$

$$G_{HP}(z) = [A_0(z) - A_1(z)]/2. \quad (4b)$$



Sl. 1. Realizaciona struktura, tip 1.

Filtri $G_{LP}(z)$ i $G_{HP}(z)$ su *allpass* i *power* komplementarni. Svaka od dve grane filtera može da se realizuje kao kaskadna veza sekcija nižeg reda. Grana označena sa A_0 sastoji se od jedne sekcije prvog reda i potrebnog broja sekcija drugog reda, a grana označena sa A_1 sastoji se samo od sekcija drugog reda:

$$A_0(z) = \frac{\alpha_1 + z^{-1}}{1 + \alpha_1 z^{-1}} \prod_{l=3,5,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l + \alpha(1 + \beta_l)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha(1 + \beta_l)z^{-1} + \beta_l z^{-2}}, \quad (5a)$$

$$A_1(z) = \prod_{l=2,4,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l + \alpha(1 + \beta_l)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha(1 + \beta_l)z^{-1} + \beta_l z^{-2}}, \quad (5b)$$

gde je N red filtera, α_1 odgovara realnom polu, a koeficijenti β_l , $l=2, 3, \dots, (N-1)/2$ su određeni položajem konjugovano-kompleksnih polova filtera (r_l moduo pola):

$$\beta_l = (r_l)^2, \quad \beta_l < \beta_{l+1}. \quad (5c)$$

Filter može da se projektuje za različite granične frekvencije. Za implementaciju varijabilnih filtera posebno je bitan slučaj *halfband* filtera, kada se izrazi (5) svode na oblik:

$$A_0^{HB}(z) = z^{-1} \prod_{l=3,5,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l^{HB} + z^{-2}}{1 + \beta_l^{HB} z^{-2}}, \quad (6a)$$

$$A_1^{HB}(z) = \prod_{l=2,4,\dots}^{(N+1)/2} \frac{\beta_l^{HB} + z^{-2}}{1 + \beta_l^{HB} z^{-2}}, \quad (6b)$$

gde je:

$$\beta_l^{HB} = (r_l)^2, \quad \beta_l^{HB} < \beta_{l+1}^{HB}. \quad (6c)$$

U [1,2] ova realizaciona struktura je označena kao *Class I* (tip 1) pa će ta oznaka biti korišćena i u ovom radu. Ova

struktura je detaljno opisana u literaturi [3] u pogledu osetljivosti pa će u ovom radu biti korišćena kao referenca za poređenje.

C. Realizaciona struktura - tip 3

U radovima [1,2] detaljno je prikazano projektovanje još dve klase filtara koje se zasnivaju na svepropusnim filtrima. Obe strukture se dobijaju kao pogodna veza *halfband* FIR prototip filtra i IIR prototip filtra. Slabljenje ukupnog filtra određeno je slabljenjem FIR prototipa dok IIR prototip kontroliše selektivnost. IIR prototip se realizuje kao paralelna veza filtara svepropusnika. U radovima [1,2] filtri su označeni kao *Class II* (tip 2) i *Class III* (tip 3) filtri, pa će te oznake biti korišćene i u ovom radu. Za filterski par tipa 2 polazni FIR filter je *halfband* FIR filter minimalne faze a za filterski par tipa 3 polazni filter je *halfband* FIR filter linearne faze. S obzirom na to da koeficijenti FIR filtra minimalne faze nisu simetrični za filter tipa 2 nije jednostavno izvesti analitičke izraze za frekvencijski odziv i osetljivosti filtra u opštem slučaju. Numerički proračun i poređenje sa IIR filtrom zasnovanom na paralelnoj vezi filtara svepropusnika (tip 1) dato je u [4]. U ovom radu biće prikazani detaljni rezultati analize filtra tipa 3.

Funkcije prenosa filterskih parova tipa 2 i tipa 3 mogu se izraziti kao:

$$G_{LP}(z) = \sum_{n=0}^N a[n] A_0(z)^n A_1(z)^{N-n}, \quad (7a)$$

$$G_{HP}(z) = \sum_{n=0}^N a_c[n] A_0(z)^n A_1(z)^{N-n}, \quad (7b)$$

gde su $a[k]$ i $a_c[k]$ koeficijenti FIR prototip filterskog para, a $A_0(z)$ i $A_1(z)$ svepropusni filtri koji, u paralelnoj vezi, formiraju IIR prototip filterski par. Filtri $G_{LP}(z)$ i $G_{HP}(z)$ su *allpass* i *magnitude* komplementarni.

Za tip 3 prototip FIR filter je *halfband* filter linearne faze iz čega sledi da je $a[n]=0$, $n=2k+1$, $a[N/2]=1/2$, red FIR filtra je oblika $N=4k+2$, $k=0,1,2,\dots$. Za koeficijente FIR prototipa propusnika visokih frekvencija važi $a_c[n]=-a[n]$, $a_c[N/2]=1/2$. Funkcije prenosa filterskog para tipa 3 mogu se izraziti kao:

$$G_{LP,HP}(z) = \frac{1}{2} A_0(z)^{\frac{N}{2}} A_0(z)^{\frac{N}{2}} \pm \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a[2k] A_0(z)^{2k} A_1(z)^{N-2k}, \quad (8)$$

gde znak + odgovara niskopropusnoj, a znak - visokopropusnoj grani.

Frekvencijski odzivi svepropusnih filtara mogu se izraziti kao:

$$A_0(e^{j\omega}) = e^{j\varphi_0}, \quad A_1(e^{j\omega}) = e^{j\varphi_1}. \quad (9)$$

Ako se iskoristi simetrija koeficijenata FIR prototip filtra linearne faze frekvencijski odziv filterskog para može se izraziti kao:

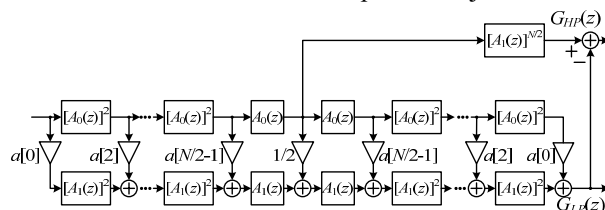
$$G_{LP,HP}(e^{j\omega}) = e^{j\frac{N}{2}(\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega))} \times \left[\frac{1}{2} \pm \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a[2k] \cos \left[\left(2k - \frac{N}{2} \right) (\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)) \right] \right], \quad (10)$$

gde znak + odgovara niskopropusnoj, a znak - visokopropusnoj grani. I u ovom slučaju je uobičajeno da se filtri svepropusnici realizuju kao kaskadna veza sekcija nižeg reda, slično kao što je pokazano u slučaju tipa 1. Fazne karakteristike svepropusnika se mogu izraziti kao:

$$\varphi_0(\omega) = \sum_{l=1,3,\dots}^{(N+1)/2} \varphi_{0l}(\omega), \quad \varphi_1(\omega) = \sum_{l=2,4,\dots}^{(N+1)/2} \varphi_{1l}(\omega), \quad (11)$$

gde su $\varphi_{0l}(\omega)$ i $\varphi_{1l}(\omega)$ fazne karakteristike svepropusnih sekcija prvog i drugog reda.

Efikasna realizaciona struktura prikazana je na Sl. 2.



Sl. 2. Realizaciona struktura, tip 3.

D. Varijacija granične frekvencije LP/HP filterskog para

Prikazane strukture pogodne su za implementaciju filtara sa varijabilnom graničnom frekvencijom. U literaturi [1,2] je prikazan razvijen algoritam kojim se jednostavno, polazeći od *halfband* filtara, menja granična frekvencija LP/HP filterskog para. Posebno je bitno da se ovim algoritmom zadržavaju sve osobine projektovanog polaznog *halfband* filterskog para.

Sam algoritam za promenu granične frekvencije sastoji se od sledećih koraka:

1. Na osnovu zadate željene granične frekvencije rezultujućeg LP/HP filterskog para ω_{3dB} odredi se vrednost parametra α :

$$\alpha = -\cos(\omega_{3dB}). \quad (12)$$

Može se uočiti da je vrednost parametra α koji figuriše u svim sekcijama određena samo graničnom frekvencijom rezultujućeg filterskog para i da ne zavisi ni od jednog drugu parametra.

2. Na osnovu dobijene vrednosti parametra α određuje se parametar α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \right). \quad (13)$$

Parametar α_1 figuriše u jedinoj sekciji prvog reda rezultujućeg filtra.

3. Za svaku sekciju drugog reda određuje se nova vrednost parametra β :

$$\beta_l = (\beta_l^{HB} + \alpha_1^2) / (\beta_l^{HB} \alpha_1^2 + 1), \quad l = 2, 3, \dots, (N+1)/2. \quad (14)$$

U [3] je prikazan način optimizacije koeficijenata filterskog para tipa 1 u cilju minimizacije greške pri implementaciji u aritmetici fiksne tačke. Kada se filter dobija varijacijom granične frekvencije polazeći od *halfband* filtara, optimizacija nije moguća. Dodatno, nove vrednosti koeficijenata filtara se računaju u aritmetici fiksne tačke, po aproksimativnim formulama [5], što dovodi do odstupanja ostvarene od željenih karakteristika. Zbog toga je bitno sprovesti analizu osetljivosti ostvarene karakteristike u odnosu na parametre filtra.

III. ANALIZA OSETLJIVOSTI

U izrazima (10a) i (10b) može se uočiti deo koji predstavlja realnu amplitudsku funkciju:

$$A_{LP,HP}(\omega) = a \left[\frac{N}{2} \right] \pm \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} a[2k] \cos \left[\left(2k - \frac{N}{2} \right) (\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)) \right], \quad (15)$$

gde znak + odgovara niskopropusnoj, a znak – visokopropusnoj grani. Amplitudska karakteristika filtra je apsolutna vrednost realne amplitudske funkcije. Analiza osetljivosti zasnivaće se na realnoj amplitudskoj funkciji jer je ona kontinualna funkcija frekvencije pa je pogodnija za diferenciranje.

Biće izložena analiza za niskopropusnu granu. Osetljivost se definiše kao:

$$S_{x_k}^A(\omega) = \frac{\partial A(\omega, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N)}{\partial x_k}, \quad (16)$$

gde je x_k parametar filtra u odnosu na koji se određuje osetljivost.

A. Osetljivost u odnosu na koeficijente FIR prototip filtra

Diferenciranjem izraza (15) dobijaju se osetljivosti u odnosu na koeficijente FIR prototip filtra:

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial a_{2k}} = \cos \left[\left(2k - \frac{N}{2} \right) (\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)) \right], \quad (17a)$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial a_{N/2}} = 1. \quad (17b)$$

S obzirom na to da je $\cos(x)$ parna funkcija osetljivost je simetrična na isti način na koji su simetrični i koeficijenti FIR prototipa. Algoritma za promenu granične frekvencije ne utiče na koeficijente FIR prototipa.

B. Osetljivost u odnosu na parametre allpass sekcija

Parametri α , α_1 , i β figurišu u allpass sekcijama prvog (samo α_1) i drugog reda, odnosno utiču na funkcije $\varphi_0(\omega)$ i $\varphi_1(\omega)$. Osetljivost se može odrediti prema:

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial x} = \frac{\partial A(\omega)}{\partial \varphi_0(\omega)} \frac{\partial \varphi_0(\omega, x)}{\partial x} + \frac{\partial A(\omega)}{\partial \varphi_1(\omega)} \frac{\partial \varphi_1(\omega, x)}{\partial x}, \quad (18)$$

gde je x parametar u odnosu na koji se osetljivost računa. Polazeći od izraza (15) dobija se:

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial \varphi_{0,1}(\omega)} = \mp 2 \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} a[2k] \left(2k - \frac{N}{2} \right) \times \sin \left[\left(2k - \frac{N}{2} \right) (\varphi_0(\omega) - \varphi_1(\omega)) \right] \quad (19)$$

gde znak – odgovara φ_0 , a znak + φ_1 . U [3] su izvedeni izrazi za osetljivosti sekcija prvog i drugog reda u odnosu na parametre koji figurišu u tim sekcijama:

$$\frac{\partial \varphi_{0,1}(\omega)}{\partial \alpha_1} = \frac{2 \sin \omega}{1 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \cos \omega} \quad (20a)$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,1}(\omega)}{\partial \beta_l} = \frac{4(\alpha + \cos \omega) \sin \omega}{(1 - \beta_l)^2 + 4\beta_l \cos^2 \omega + \alpha(1 + \beta_l)^2 (\alpha + 2 \cos \omega)} \quad (20b)$$

$$\frac{\partial \varphi_{0,1}(\omega)}{\partial \alpha} = \frac{2(1 - \beta_l^2) \sin \omega}{(1 - \beta_l)^2 + \alpha(1 + \beta_l)^2 + 2\alpha(1 + \beta_l)^2 \cos \omega + 4\beta_l \cos^2 \omega} \quad (20c)$$

Parametri α_1 i β_l , $l=2,3,\dots,(N+1)/2$, figurišu samo u po jednoj sekciji dok se za parametar α ukupna osetljivost dobija kao zbir osetljivosti u odgovarajućim allpass filtrima.

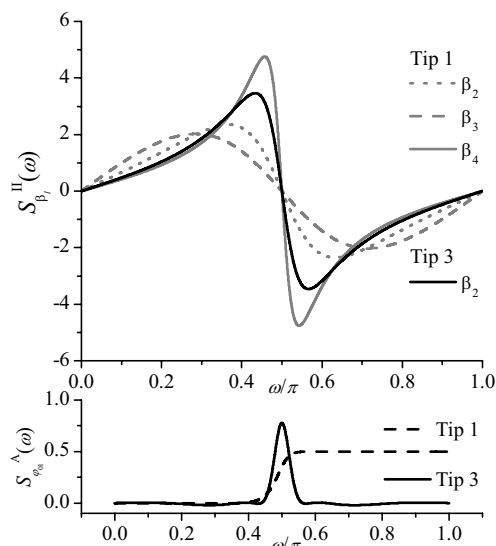
IV. REZULTATI

Kao ilustrativni primer biće prikazani rezultati za filtre tipa 1 i tipa 3 približnih karakteristika. Za oba filtra definisano je slabljenje u nepropusnom opsegu od 60 dB. Za oba filtra posmatraju se halfband filtri i filtri sa graničnom frekvencijom $\omega_0=0.1\pi$. U Tabeli 1 dat je pregled bitnih parametara za oba filtra.

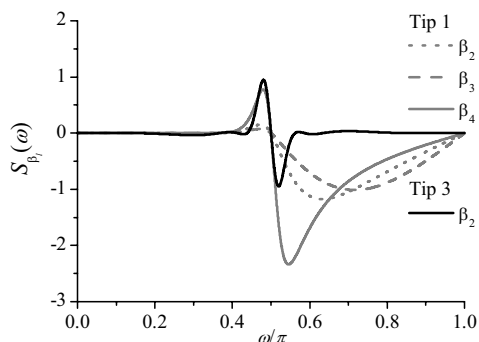
TABELA 1: PARAMETRI OBA TIPA FILTARA.

Tip 1		Tip 3	
Parametar	Vrednost	Parametar	Vrednost
IIR, red N	7	FIR, red N	6
$\omega_0=0.5\pi$, β_2	0.1090	FIR, a_0 i a_6	-0.0348
$\omega_0=0.5\pi$, β_3	0.3850	FIR, a_2 i a_4	0.28428
$\omega_0=0.5\pi$, β_4	0.7612	IIR, A_s	14.5 dB
$\omega_0=0.1\pi$, β_2	0.6022	IIR, red N	3
$\omega_0=0.1\pi$, β_3	0.7587	$\omega_0=0.5\pi$, β_2	0.6499
$\omega_0=0.1\pi$, β_4	0.9196	$\omega_0=0.1\pi$, β_2	0.8769

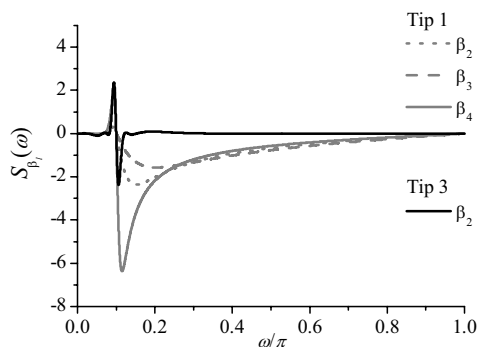
Na graficima koji su dati na Sl. 3. – Sl. 8. prikazani su dobijeni rezultati za niskopropusni filter. Na Sl. 3. su prikazani rezultati koji se dobijaju prema izrazu (20b), gornja slika, i parcijalni izvodi realne amplitudske karakteristike u odnosu na $\varphi_{0,1}$. Već sa te slike može se zaključiti da je struktura označena kao tip 3 pogodnija u odnosu na strukturu označenu kao tip 1. S jedne strane, IIR prototip filter je manjeg reda i manje je slabljenje koje treba ostvariti tim filtrom pa su samim tim polovi filtra dalji u odnosu na jedinični krug (manje β) što znači da je osetljivost dobijena prema izrazu (20b) manja. Dodatno, parcijalni izvod kojim se množi izraz (20b) da bi se dobila konačna osetljivost po parametru β ima povoljniji oblik u slučaju tipa 3. Ova povoljnost je posebno vidljiva u nepropusnom opsegu, Sl. 4. Dakle, struktura 3 je u nepropusnom opsegu povoljnija po pitanju osetljivosti od strukture 1. Sa Sl. 5 uočava se da je smanjenje granične frekvencije filtra dovelo do porasta osetljivosti, što je i očekivano jer su se parametri β_l povećali. Za parametar α_1 , Sl. 7., takođe se uočava prednost strukture 3. Parametar α , Sl. 6., utiče samo na malo pomeranje granične frekvencije filtra pa je, očekivano, osetljivost najveća u okolini granične frekvencije. Na Sl. 8. prikazani su rezultati dobijeni za polazni i transformisani filter za koeficijente prototip FIR filtra. S obzirom na to da se ovi koeficijenti ne menjaju u procesu transformacije filtra očekivano je da osetljivosti transformisanog filtra ostanu istog oblika kao kod polaznog filtra.



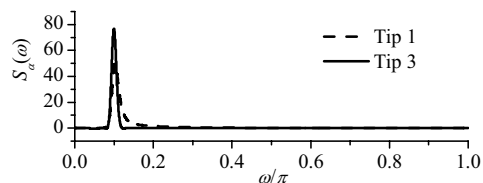
Sl. 3. Parcijalne osetljivosti, parametar β_i , halfband filter.



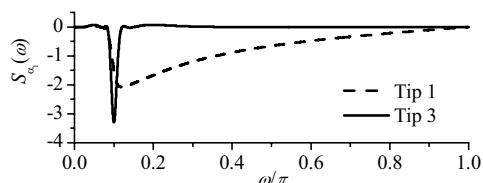
Sl. 4. Ukupna osetljivost, parametar β_i , halfband filter.



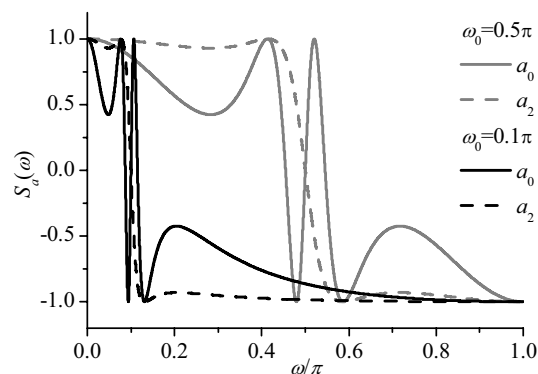
Sl. 5. Ukupna osetljivost, parametar β_i , $\omega_0=0.1\pi$.



Sl. 6. Ukupna osetljivost, parametar α , $\omega_0=0.1\pi$.



Sl. 7. Ukupna osetljivost, parametar α_1 , $\omega_0=0.1\pi$.



Sl. 8. Ukupna osetljivost, koeficijenti FIR prototipa.

V. ZAKLJUČAK

U radu je razmatrana osetljivost dve strukture dvokanalnih IIR banki filtera: struktura zasnovane na paralelnoj vezi dva svepropusnika, označena kao tip 1, i struktura koja se sastoji od filtera svepropusnika povezanih mrežom koeficijenata (*tapped-cascaded interconnection of allpass filters*) označena kao tip 3. Iz detaljne analize osetljivosti prikazane u radu sledi da je struktura označena kao tip 3, u pogledu osetljivosti pogodnija za implementaciju varijabilnih filtera u aritmetici fiksne tačke.

LITERATURA

- [1] T. Saramäki and L. Milić "Three Classes of Complementary Recursive Filter Pairs with Variable Crossover Frequency", *Circuits Systems and Signal Processing*, submitted for publication.
- [2] L. Milić and T. Saramäki, "Three classes of IIR complementary filter pairs with an adjustable crossover frequency," in *Proc. of the 2003 Int. Symp. on Circuits and Systems*, May 2003, vol. 4, pp. IV-145–IV-148.
- [3] L. D. Milić and M. D. Lutovac, "Design of multiplierless elliptic IIR filters with a small quantization error," *IEEE Trans. Signal Processing*, Feb. 1999, vol.47, No. 2, pp. 469–479.
- [4] J. Čertić and L. Milić, "On the Sensitivity of Two-Channel IIR Filter Banks with Variable Crossover Frequency", in *Proc. of the 2007 International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis ISPA 2007*, Istanbul, Turkey, Sept. 2007, pp. 86-91.
- [5] J. Čertić and L. Milić, "Signal processor implementation of a low-pass/high-pass IIR digital filter with variable cut-off frequency," in *Proc. IEEE Region 8 EUROCON 2005*, Belgrade, Serbia, Nov., 2005, pp. 1618–1621.

ABSTRACT

In this paper, a complete sensitivity analysis of one class of variable complementary two-channel IIR filter bank is presented. Filters discussed in this paper are developed from a halfband linear phase FIR prototype and an IIR prototype by making use of very simple tuning formulae. Two-channel filter bank considered in the paper is both allpass and magnitude complementary.

SENSITIVITY ANALYSIS OF ONE CLASS OF VARIABLE TWO-CHANNEL IIR FILTER BANKS

Jelena D. Čertić and Ljiljana D. Milić