

Realna dekompozicija Chebyshev-ljeve IIR filtarske funkcije propusnika opsega frekvencija

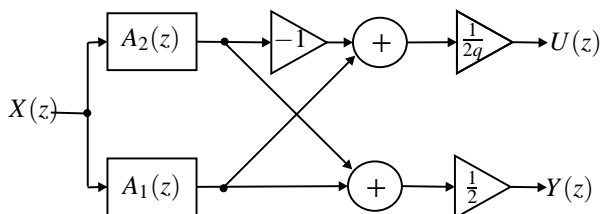
Goran Z. Stančić, Vlastimir D. Pavlović

Sadržaj—U radu je opisan postupak za dekompoziciju Chebyshev-ljeve IIR filtarske funkcije propusnika opsega frekvencija. U ovom radu je opisana kompletna dekompozicija za selektivne digitalne filtarske funkcije propusnike opsega. Dat je generalni pristup dekompozicije i sa realnim i sa kompleksnim koeficijentima za isti red filtra. Ova generalizacija dekompozicije biće ilustrovana na primeru Chebyshev-ljevog filtra propusnika opsega frekvencija dvanaestog reda. U radu je opisana realna dekompozicija za filtarsku funkciju parnog reda. Prototipska filtarska funkcija šestog reda (parnog) ima samo jedno rešenje i to kompleksnu dekompoziciju.

Ključne reči—Allpass dekompozicija, Digitalni filtri, filtri sa kompleksnim koeficijentima, paralelna realizacija, IIR filtri.

I. UVOD

Rekurzivni digitalni filter, čija prenosna karakteristika ispunjava određene uslove [1], može biti realizovan preko paralelne veze dva allpass filtra kako je pokazano na sl. 1 [2], [3], [4].



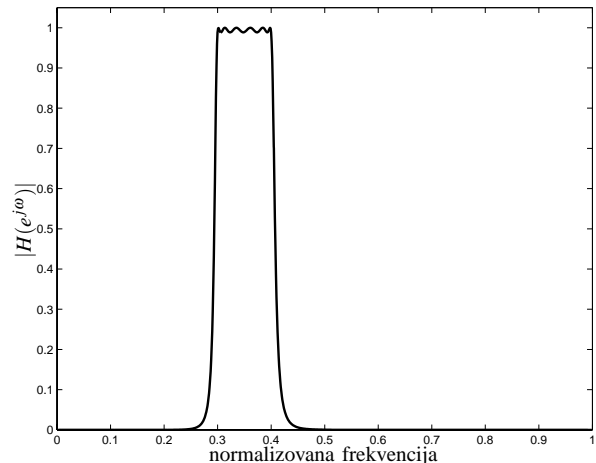
Sl. 1. Paralelna allpass struktura za realizaciju para filtara propusnika niskih/visokih, odnosno propusnika/nepropusnika opsega frekvencija.

Osnovna ideja se svodi na to da su izlazi allpass grana u fazi u propusnom opsegu a za realizaciju nepropusnog opsega treba obezbediti da je fazna razlika ovih grana jednaka približno π rad zbog čega se signali na njihovim izlazima praktično oduzimaju (na izlazu koji je na sl.1 obeležen sa $Y(z)$). Propusni i nepropusni opseg jednostavno zamenjuju uloge promenom znaka na sabiraču tako da se radi o jako efikasnoj realizaciji komplementarnih filtarskih funkcija. U postojećoj literaturi su navedeni uslovi koje treba da ispune allpass filtri iz paralelnih grana kako bi se dobio odgovarajući tip filtarske funkcije.

U slučaju realizacije filtara propusnika niskih tj. visokih

G. Z. Stančić, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-63-1045463; faks: 381 18 588399; e-mail: stane@elfak.ni.ac.yu).

V. D. Pavlović, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-18-529206; faks: 381 18 588399; e-mail: vpavlovic@elfak.ni.ac.yu).



Sl. 2. Amplitudska karakteristika Chebyshev-ljevog filtra reda $N = 12$.

frekvencija, radi zadovoljavanja uslova vezanih za fazu filtra, potrebno je da se red allpass filtara razlikuje za jedan u slučaju dekompozicije na allpass filtre sa realnim koeficijentima. Pri realizaciji filtara propusnika opsega tj. nepropusnika opsega frekvencija, u literaturi se navodi uslov da se red allpass filtara mora da razlikuje za dva [2]. Na primeru Chebyshev-ljevog IIR filtra reda $N = 2(2k) = 12$, u slučaju gde je prototipska filtarska funkcija parnog reda i moguća je samo kompleksna dekompozicija. U ovom radu biće dato i rešenje realne dekompozicije za isti red filtra i obe dekompozicije predstavljaju sva moguća rešenja za IIR filter propusnik opsega, pri čemu su allpass filtri iz paralelnih grana istog reda $N/2$. U programskom paketu MATLAB[®] u filterdesign toolbox-u program tf2ca.m za filtre propusnike/nepropusnike opsega frekvencija nudi samo kompleksno rešenje za slučaj da je prototipska filtarska funkcija parnog reda.

II. KOMPLEKSNA DEKOMPOZICIJA

Selektivna digitalna IIR filtarska funkcija ima oblik

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}, a_0 = 1 \quad (1)$$

sa simetričnim polinomom u brojiocu, kada važi

$$B(z) = z^{-N} B(z^{-1}) \quad (2)$$

i odgovarajući komplementarni filtar

$$G(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N c_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}, a_0 = 1 \quad (3)$$

za koje važi relacija

$$|H(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (4)$$

moгу biti realizovani paralelnom vezom dva allpass filtra, kako je prikazano na sl. 1. U slučaju simetričnog polinoma $C(z)$, allpass filtri su sa kompleksnim koeficijentima a i parametar q sa sl. 1 ima vrednost $q = j$. Detaljni matematički opis određivanja polova, samim tim i koeficijentata filtarskih funkcija allpass mreža

$$A_1(z) = [H(z) + jG(z)] \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$A_2(z) = [H(z) - jG(z)] \frac{1}{2j}$$

je opisan u radu [1].

$$A_1(z) = \beta^* A'_1(z) = \beta^* \prod_{k=1}^{N/2} \frac{z^{-1} - z_k}{1 - z^{-1} z_k^*} = \beta^* \frac{\sum_{k=0}^{N/2} a_{1,k} z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N/2} a_{1,N/2-k}^* z^{-k}}$$

$$A_2(z) = \beta A'_2(z) = \beta \prod_{k=1}^{N/2} \frac{z^{-1} - z_k^*}{1 - z^{-1} z_k} = \beta \frac{\sum_{k=0}^{N/2} a_{2,k} z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N/2} a_{2,N/2-k}^* z^{-k}} \quad (6)$$

Odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija $A_1(z)$ i $A_2(z)$ su međusobno konjugovano kompleksni a polovi uklješteni. Drugim rečima ako se nule $\lambda_k = \rho_k e^{j\phi_k}$, $k = 1, 2, \dots, N$ polinoma $A(z)$, koje se javljaju u konjugovano kompleksnim parovima s obzirom na realne koeficijente a_i , uredе po faznim uglovima tako da važi

$$\varphi_{2k-1} = -\varphi_{2k} \quad (7)$$

$$\varphi_{2k-1} < \varphi_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2$$

za polove prenosne funkcije $A'_1(z)$ se uzimaju polovi λ_{-3+4k} i λ_{4k} a za polove prenosne funkcije $A'_2(z)$ se uzimaju polovi λ_{-1+4k} i λ_{-2+4k} , gde je $k = 1, 2, \dots, N/4$. Ovako dobijene kompleksne allpass funkcije $A'_k(z) = e^{j\phi'_k(\omega)}$, $k = 1, 2$ ne poseduju približno nultu faznu razliku $\phi'_1(\omega) - \phi'_2(\omega)$ unutar željenog propusnog opsega filtra $H(e^{j\omega}) = U(e^{j\omega})/X(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\Phi(\omega)}$, što će biti pokazano na konkretnom primeru. Množenjem kompleksnom konstantom $\beta = e^{j\gamma}$, što je dato izrazom (6), se dobijaju allpass filtri $A_1(z)$ i $A_2(z)$ sa nultom faznom razlikom u nepropusnom i razlikom od približno π rad u propusnom opsegu, s obzirom da se izlaz filtra $H(z)$ dobija oduzimanjem izlaza allpass sekcija. Kompleksni koeficijent β može biti određen iz izraza

$$\beta = \pm \left[\cos \frac{2\phi'_1(0) - \Phi(0)}{2} + j \sin \frac{2\phi'_1(0) - \Phi(0)}{2} \right] \quad (8)$$

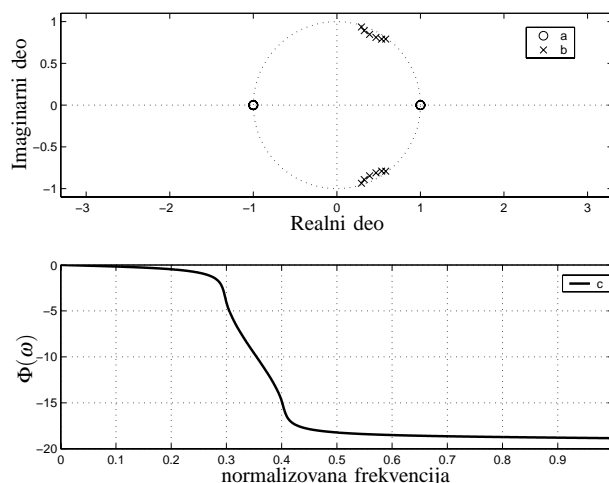
Usvajanjem konstante $\beta' = \pm [\Im\{\beta\} - j\Re\{\beta\}]$ mogu se zameniti uloge propusnog i nepropusnog opsega.

III. PRIMER

Kompleksna i realna dekompozicija istog filtra propusnika opsega frekvencija je pokazana na primeru Chebyshev-ljevog filtra reda $N = 12$, sa granicama propusnog opsega $\omega_{p1} = 0.3\pi$ i $\omega_{p2} = 0.4\pi$, maksimalnog slabljenja u propusnom opsegu $A_{max} = 0.1dB$. Koeficijenti prenosne funkcije ovog filtra su dati u tabeli 1. Odgovarajuća amplitudska odnosno, fazna karakteristika i položaj nula i polova su dati na sl.2i sl.3, respektivno.

TABELA 1: KOEFICIJENTI CHEBYSHEV-LJEVOG FILTRA PROPUSNIKA OPSEGA FREKVENCIJA REDA $N = 12$.

i	$b_i \times 10^{-4}$	a_i
0	0.02380192734622	1.000000000
1	0.00000000000000	-5.20526086131000
2	-0.14281156407735	16.64602281460396
3	0.00000000000000	-36.40555888733454
4	0.35702891019337	61.27544768545083
5	0.00000000000000	-80.72918829632414
6	-0.47603854692449	86.11417256618424
7	0.00000000000000	-73.81899971436640
8	0.35702891019337	51.23247006879544
9	0.00000000000000	-27.82828079463498
10	-0.14281156407735	11.63258052638597
11	0.00000000000000	-3.32453574087048
12	0.02380192734622	0.58422445076703

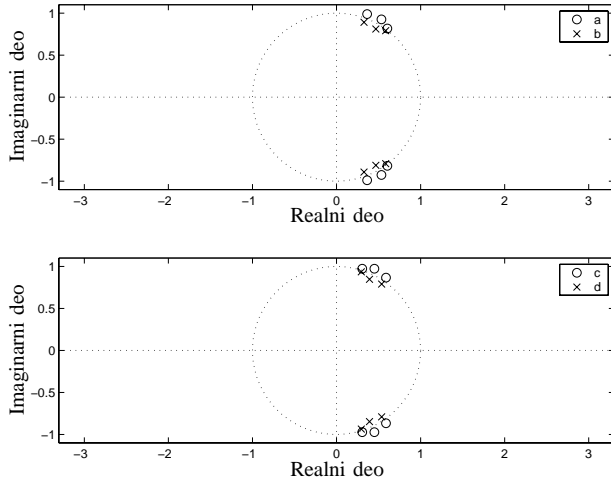


Sl. 3. Nule (a), polovi (b) i i fazna karakteristika (c) Chebyshev-ljevog filtra propusnika opsega frekvencija reda $N = 12$.

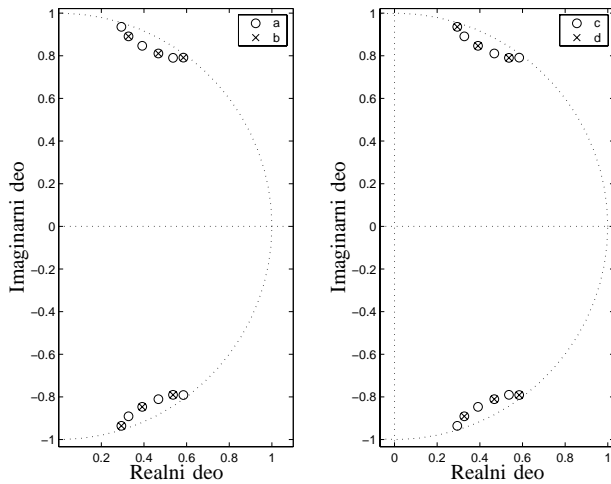
TABELA 2: KOEFICIJENTI KOMPLEKSNIH ALLPASS FILTARA $A'_1(z)$ I $A'_2(z)$.

$\beta = -0.17643088506092 + j0.98431303089854$		
i	$a_{1,i}$	$a_{2,i}$
0	0.752355078 + j0.134856543	0.752355078 - j0.134856543
1	-2.151397518 - j0.323699703	-2.151397517 + j0.323699703
2	4.486826756 + j0.548412252	4.486826755 - j0.548412252
3	-5.339305319 - j0.493992336	-5.339305319 + j0.493992336
4	4.932990011 + j0.310080608	4.932990011 - j0.310080608
5	-2.602630431 - j0.079734774	-2.602630430 + j0.079734774
6	1.000000000	1.000000000

Opisanim postupkom, kao u postojećoj literaturi, se dolazi do kompleksnih allpass filtara (korišćenjem tf2ca naredbe u programskom paketu MATLAB® se dolazi do identičnih rezultata) čiji su kompleksni koeficijenti dati u



Sl. 4. Nule (a) i polovi (b) allpass filtra $A_1(z)$ i nule (c) i polovi (d) allpass filtra $A_2(z)$.



Sl. 5. Polovi Chebyshev-ljevog filtra (a),(c) i kompleksnih allpass filtara $A_1(z)$ (b) i $A_2(z)$ (d).

tabeli 2. Nule i polovi ovih allpass filtara su dati na sl. 4 a međusobni odnos polova allpass sekcija i selektivnog polaznog filtra na sl. 5.

Za filtre propusnike niskih/visokih frekvencija ovakva kompleksna dekompozicija predstavlja jedino moguće rešenje.

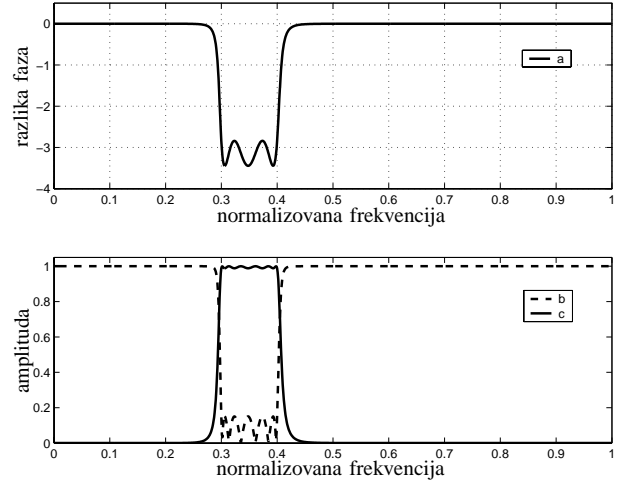
Na sl. 6 je data razlika faza kompleksnih allpass filtara. S obzirom na direktnu vezu između amplitude rezultujućeg filtra i fazne razlike filtara u paralelnim granama

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sin \frac{(\phi'_1(\omega) - \gamma) - (\phi'_2(\omega) + \gamma)}{2} \right|$$

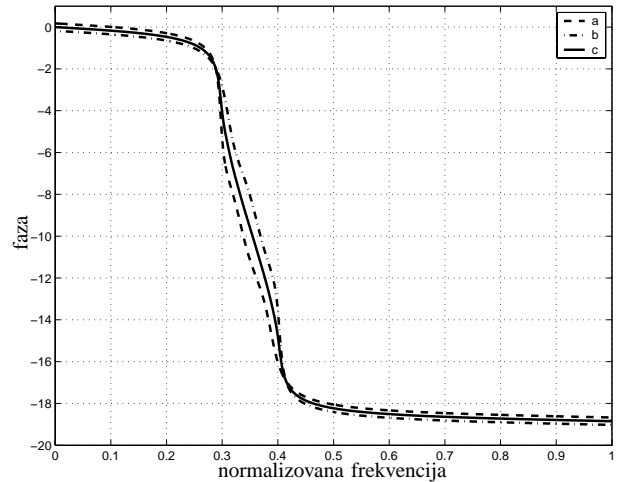
razlika faza ima skok od πrad pri prelasku iz nepropusnog u propusni opseg i obrnuto. Amplitudske karakteristike realizovanih komplementarnih filtara su prikazane na sl. 6 a faze allpass filtara i Chebyshev-ljevog filtra na sl. 7.

IV. REALNA DEKOMPOZICIJA ISTE FILTARSKE FUNKCIJE

Za filtre propusnike/nepropusnike opsega frekvencija reda $N = 2(2K)$, čija je prototipska funkcija takođe parnog



Sl. 6. Razlika faza kompleksnih allpass filtara $\beta^* A'_1(z)$ i $\beta A'_2(z)$ (a) i amplitudske karakteristike komplementarnih filtara: nepropusnik opsega $U(z)/X(z)$ (b) i propusnik opsega $Y(z)/X(z)$ (c), dobijenih paralelnom vezom kompleksnih allpass filtara.



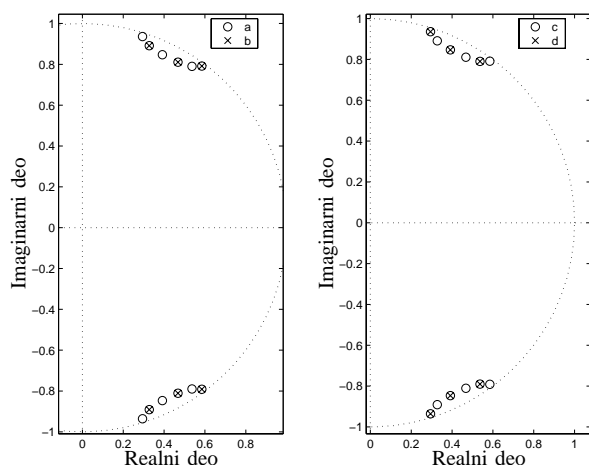
Sl. 7. Fazne karakteristike kompleksnih allpass filtara $A'_1(z)$ (a) i $A'_2(z)$ (b) i Chebyshev-ljevog filtra (c).

TABELA 3: KOEFICIJENTI REALNIH ALLPASS FILTARA $A_1(z)$ I $A_2(z)$.

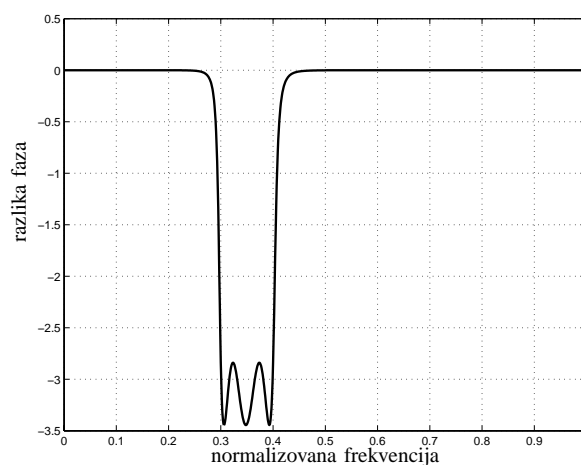
i	$a_{1,i}$	$a_{2,i}$
0	0.76434849325788	0.76434303975257
1	-2.29502252077165	-2.05449643048282
2	4.76029632947721	4.28988296818819
3	-5.75166729257318	-4.98024674051624
4	5.21811751197616	4.67897274829172
5	-2.75996003446606	-2.44530082684393
6	1.00000000000000	1.00000000000000

reda $M = 2K$ moguća je i realna dekompozicija pri čemu su allpass filtri istog reda $N/2$. U ovom slučaju se uparuju konjugovano kompleksni polovi, tj. za polove prenosne funkcije $A'_1(z)$ se uzimaju polovi λ_{-3+4k} i λ_{-2+4k} a za polove prenosne funkcije $A'_2(z)$ se uzimaju polovi λ_{-1+4k} i λ_{4k} , gde je $k = 1, 2, \dots, N/4$, kako je pokazano na slici 8, tako da se dolazi do allpass filtara sa realnim koeficijentima.

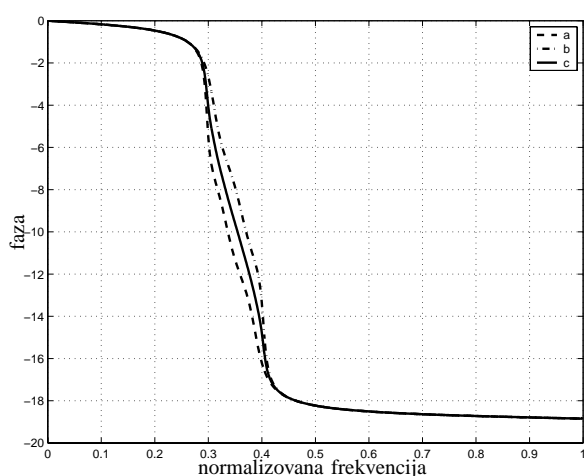
Koeficijenti ovako dobijenih allpass filtara su prikazani u tabeli 3. Izraz (6) i dalje važi za $\beta = 1$. Kod ovakvog



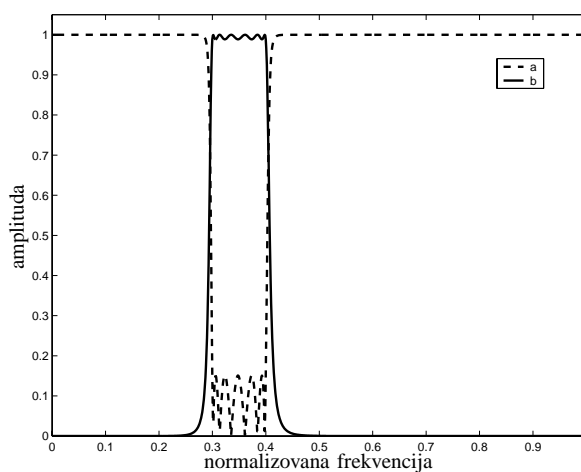
Sl. 8. Polovi Chebyshev-ljevog filtra (a),(c) i realnih allpass filtera $A_1(z)$ (b) i $A_2(z)$ (d).



Sl. 10. Razlika faza realnih allpass filtera $A_1(z)$ i $A_2(z)$.



Sl. 9. Fazne karakteristike realnih allpass filtera $A_1(z)$ (a), $A_2(z)$ (b) i Chebyshev-ljevog filtra (c).



Sl. 11. Amplitudske karakteristike komplementarnih filtera: nepropusnik opsega (a) i propusnik opsega (b), dobijenih paralelnom vezom realnih allpass filtera.

rešenja polinom $C(z)$ je sa asimetričnim koeficijentima a pri realizaciji šemom sa slike 1 koeficijent q ima vrednost 1.

V. ZAKLJUČAK

U radu je opisan postupak za kompleksnu i realnu dekompoziciju Chebyshev-ljeve IIR filtarske funkcije istog reda propusnika opsega frekvencija. Dat je generalni pristup dekompozicije i sa realnim i sa kompleksnim koeficijentima za isti red filtra. Ilustrovana je generalizacija dekompozicije na primeru Chebyshev-ljevog filtra propusnika opsega frekvencija dvanaestog reda. Prototipska filtarska funkcija šestog reda (parnog) ima samo kompleksnu dekompoziciju a rekurzivni digitalni filter propusnik opsega ima i kompleksnu i realnu dekompoziciju.

LITERATURA

- [1] P. P. Vaidyanathan, P. A. Regalia, and S. K. Mitra, "Design of doubly complementary iir digital filters using a single complex allpass filters with multirate applications," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-34, no. 4, pp. 378–389, 1987.
- [2] M. Lang and T. I. Laakso, "Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares phase error criterion," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, pp. 40–48, 1994.

- [3] M. Lang, "Allpass filter design and applications," *IEEE Trans. Sign. Process*, vol. 46, no. 9, pp. 2505–2514, 1998.
- [4] M. Ikehara, H. Tanaka, and H. Kuroda, "Design of iir digital filters using all-pass networks," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 41, no. 3, pp. 231–235, 1994.
- [5] J. S. Huang and S. S. Warwick, "Direct design of complex iir all-pass filters with approximately linear phase," *ECCTD'97 Proc.*, pp. 529–532, 1997.

ABSTRACT

Decomposition of IIR Chebyshev bandpass filters is described in this paper. The both possible decompositions of selective bandpass filter are given. For the same selective filter, one solution give allpass filters with real and the other with complex coefficients. This general approach is illustrated on Chebyshev bandpass filter of order $N = 12$. Therefore, real decomposition of even order selective filter function is given. Only complex decomposition of even order prototype transfer function ($N = 6$) is possible.

REAL DECOMPOSITION OF IIR CHEBYSHEV BANDPASS FILTERS

Goran Stančić and Vlastimir Pavlović