

# Kompleksna dekompozicija Butterworth-ove IIR filtarske funkcije propusnika opsega frekvencija

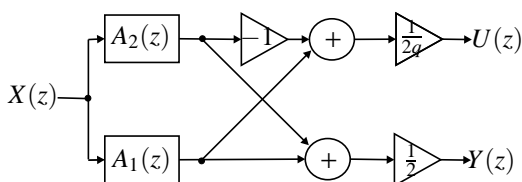
Vlastimir D. Pavlović, Goran Z. Stančić

**Sadržaj**—U radu je opisan postupak za dekompoziciju IIR filtarske funkcije propusnika opsega frekvencija. Dekompozicija niskopropusnih digitalnih filtera, ima samo jedno rešenje i to samo realno ili samo kompleksno za neparni ili parni red prototipskog filtera, respektivno. U ovom radu je opisana kompletna dekompozicija za digitalne filtarske funkcije propusnike opsega. Opisan je generalni pristup dekompozicije i sa realnim i sa kompleksnim koeficijentima za isti red filtera. Znači ista IIR filtarska funkcija propusnika opsega frekvencija može biti realizovana na dva načina, paralelnom vezom allpass filtera kako sa kompleksnim tako i sa realnim koeficijentima. Ova generalizacija dekompozicije biće ilustrovana na primeru Butterworth-ovog digitalnog filtera propusnika opsega frekvencija desetog reda. Originalna dekompozicija sa kompleksnim koeficijentima je opisana u ovom radu i sa realnom dekompozicijom čini celinu za isti red filtera. Za neparni red prototipske digitalne filtarske funkcije postoji samo realna dekompozicija.

**Ključne reči**—Allpass dekompozicija, Digitalni filtri, filtri sa kompleksnim koeficijentima, paralelna realizacija, IIR filtri.

## I. UVOD

Rekurzivni digitalni filter [1], [2], čija prenosna karakteristika ispunjava određene uslove [3], može biti realizovan preko paralelne veze dva allpass filtera kako je pokazano na sl. 1 [4], [5], [6].

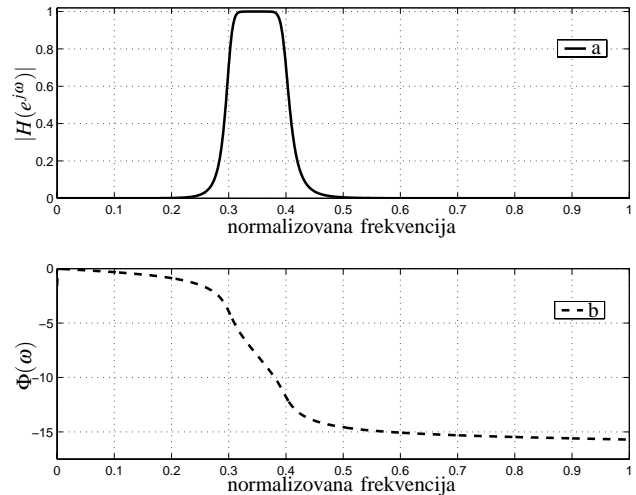


Sl. 1. Paralelna allpass struktura za realizaciju para filtera propusnika niskih/visokih, odnosno propusnika/nepropusnika opsega frekvencija.

Osnovna ideja dekompozicione tehnike se svodi na to da su izlazi allpass grana u fazi u propusnom opsegu a za realizaciju nepropusnog opsega treba obezbediti da je fazna razlika ovih grana jednaka približno  $\pi$  rad zbog čega se signali na njihovim izlazima praktično oduzimaju (na izlazu koji je na sl.1 obeležen sa  $Y(z)$ ). Propusni i nepropusni opseg jednostavno zamenjuju uloge promenom znaka na sabiraču tako da se radi o jako efikasnoj realizaciji komplementarnih filtarskih funkcija.

V. D. Pavlović, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-18-529206; faks: 381 18 588399; e-mail: vpavlovic@elfak.ni.ac.yu).

G. Z. Stančić, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-63-1045463; faks: 381 18 588399; e-mail: stane@elfak.ni.ac.yu).



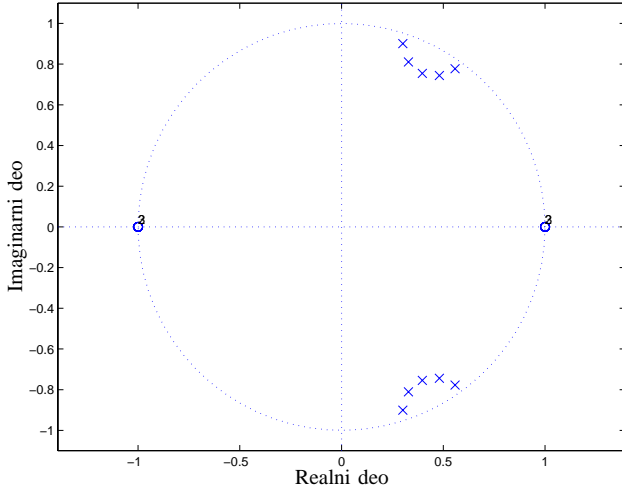
Sl. 2. Amplitudska (a) i fazna (b) karakteristika Butterworth-ovog filtera desetog reda propusnika opsega frekvencija.

TABELA 1: KOEFICIJENTI BUTTERWORTH-OVOG FILTERA REDA  $N = 10$  PROPUSNIKA OPSEGA FREKVENCIIJA.

$i$	$b_i \times 10^{-3}$	$a_i$
0	0.05979578036936	1.000000000
1	0.00000000000000	-4.12974118773797
2	-0.29897890184680	10.82424470021437
3	0.00000000000000	-18.91934006458494
4	0.59795780369359	25.33515715656520
5	0.00000000000000	-25.71126435344887
6	-0.59795780369359	20.65955024665333
7	0.00000000000000	-12.57708506433216
8	0.29897890184680	5.86533009189779
9	0.00000000000000	-1.82240664078056
10	-0.05979578036936	0.35992824506356

U postojećoj literaturi su navedeni uslovi koje treba da ispune allpass filtri iz paralelnih grana kako bi se dobio odgovarajući tip filtarske funkcije. U slučaju realizacije prototipskog filtera propusnika niskih ili visokih frekvencija, radi zadovoljavanja uslova vezanih za fazu filtera, potrebno je da se red allpass filtera  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$  razlikuje za jedan u slučaju dekompozicije na allpass filtre sa realnim koeficijentima. Pri realizaciji filtera propusnika opsega (ili nepropusnika opsega) frekvencija, u literaturi se navodi uslov da se red allpass filtera  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$  mora da razlikuje za dva da bi dekompozicija bila moguća [4] i to predstavlja samo jedno partikularno rešenje i startnu osnovu za kompletno istraživanje.

U ovom radu opisana je kompleksna dekompozicija IIR filtarske funkcije propusnika opsega i sa realnom dekompozicijom iste filtarske funkcije daje sva moguća rešenja dekompozicije. U radu je ilustrovano primer zasno-



Sl. 3. Nule i polovi Butterworth-ovog filtra propusnika opsega frekvencija reda  $N = 10$ .

van na prototipskom digitalnom Butterworth-ovom filtru neparnog petog reda. Na osnovu znanja datog u literaturi moguće je realizovati filter propusnik opsega sa realnim koeficijentima. Dalji nastavak istraživanja predstavlja drugo partikularno rešenje Butterworth-ovog filtra desetog reda propusnika opsega sa kompleksnim koeficijentima a vezano za isti početni prototipski filter.

## II. REALNA DEKOMPOZICIJA

Postupak za određivanje koeficijenata prenosnih funkcija  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$

$$A_1(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N/2-1} a_{1,i} z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N/2-1} a_{N/2-1-i} z^{-i}} \quad i \quad A_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N/2+1} a_{1,i} z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N/2+1} a_{N/2+1-i} z^{-i}} \quad (1)$$

allpass sekcija iz paralelnih grana sa sl. 1, kojima se realizuju komplementarne filterske funkcije

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad i \quad G(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N c_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (2)$$

sa realnim koeficijentima, koje zadovoljavaju uslov

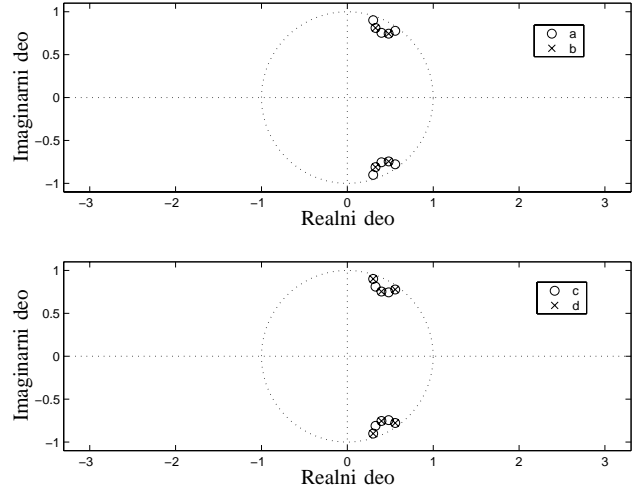
$$|H(e^{j\omega})|^2 + |G(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (3)$$

za slučaj niskopropusnih filtara je opisan u radu [3]. Koeficijenti polinoma  $B(z)$  su simetrični tako da važi

$$B(z^{-1}) = z^{-N} B(z). \quad (4)$$

Opisani postupak se uz male modifikacije, jer su koeficijenti  $b_i$  tada antisimetrični, može koristiti i za realizaciju digitalnih filtara propusnika opsega frekvencija. Na osnovu date prenosne funkcije  $H(z)$  se formira polinom

$$R(z) = \sum_{i=0}^{2N} r_i z^{-i} = C(z)C(z) = B(z)B(z) - z^{-N} A(z^{-1})A(z) \quad (5)$$



Sl. 4. Polovi Butterworth-ovog filtra (a),(c) i realnih allpass filtara  $A_1(z)$  (b) i  $A_2(z)$  (d).

na osnovu koga se određuju lako koeficijenti  $c_i$ , komplementarnog filtra nepropusnika opsega.

U narednom koraku se određuju nule polinoma  $B(z) + C(z)$  i uočavaju one koje se nalaze unutar jediničnog kruga.

TABELA 2: KOEFICIJENTI REALNIH ALLPASS FILTARA  $A_1(z)$  I  $A_2(z)$ .

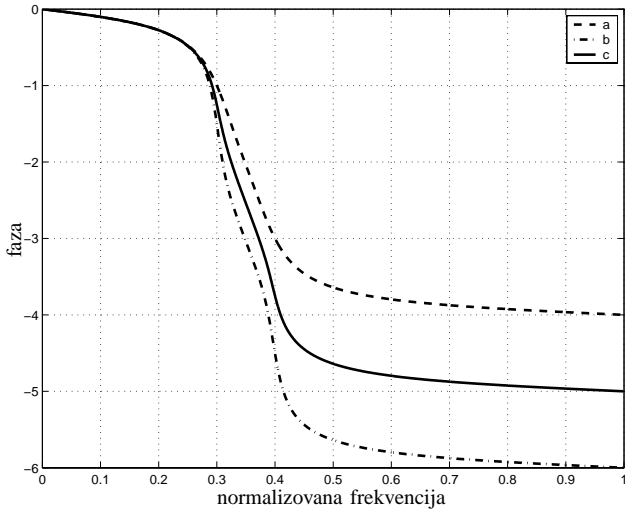
$i$	$a_{1,i}$	$a_{2,i}$
0	0.60000000000112	0.59988040844038
1	-1.25102377530060	-1.78656997914809
2	2.18123402240769	3.86968169248853
3	-1.61874341404045	-4.78006930318022
4	1.00000000000000	4.57834956896991
5		-2.51099777369907
6		1.00000000000000

Ovako odabrane nule predstavljaju polove allpass filtra  $A_1(z)$  i na osnovu njih se određuju odgovarajući koeficijenti  $a_{1,i}, i = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ . Nule polinoma  $B(z) - C(z)$  koje su locirane unutar jediničnog kruga predstavljaju polove allpass filtra  $A_2(z)$ , na osnovu kojih se sračunavaju koeficijenti  $a_{2,i}, i = 0, 1, \dots, N/2 + 1$ . Ovako određeni polovi allpass filtara su istovremeno i polovi polaznog filtra propusnika opsega.

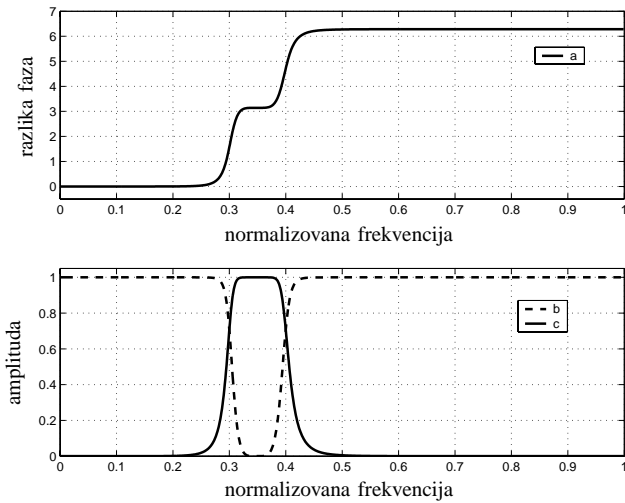
Odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$  su realni a polovi uklješteni. Drugim rečima ako se nule  $\lambda_k = \rho_k e^{j\varphi_k}, k = 1, 2, \dots, N$  polinoma  $A(z)$ , koje se javljaju u konjugovano kompleksnim parovima s obzirom na realne koeficijente  $a_i$ , uredi po faznim uglovima tako da važi

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1} &= -\varphi_{2k} \\ \varphi_{2k-1} &< \varphi_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 \end{aligned} \quad (6)$$

za polove prenosne funkcije  $A_1(z)$  se uzimaju polovi  $\lambda_{-3+4k}$  i  $\lambda_{-2+4k}$  gde je  $k = 1, 2, \dots, (N+2)/4$  a za polove prenosne funkcije  $A_2(z)$  se uzimaju polovi  $\lambda_{-1+4k}$  i  $\lambda_{4k}$ , gde je  $k = 1, 2, \dots, (N-2)/4$ . Ovako dobijene realne allpass funkcije  $A_k(z) = e^{j\varphi_k(\omega)}, k = 1, 2$  poseduju približno nultu faznu razliku  $\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)$  unutar željenog nepropusnog opsega filtra  $H(e^{j\omega}) = U(e^{j\omega})/X(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\Phi(\omega)}$ . Pri realizaciji kao na sl. 1 parametar  $q$  ima vrednost 1.



Sl. 5. Fazne karakteristike realnih allpass filtera  $A_1(z)$  (a) i  $A_2(z)$  (b) i Butterworth-ovog filtra (c)



Sl. 6. Razlika faza realnih allpass filtera  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$  (a) i amplitudske karakteristike komplementarnih filtera: nepropusnik opsega  $U(z)/X(z)$  (b) i propusnik opsega  $Y(z)/X(z)$  (c), dobijenih paralelnom vezom realnih allpass filtera.

### III. PRIMER

Realna i kompleksna dekompozicija istog filtra propusnika opsega frekvencija je pokazana na primeru Butterworth-ovog filtra reda  $N = 10$ , sa granicama propusnog opsega  $\omega_{p1} = 0.3\pi$  i  $\omega_{p2} = 0.4\pi$ . Koeficijenti prenosne funkcije ovog filtra su dati u tabeli 1. Odgovarajuća amplitudska odnosno, fazna karakteristika i položaj nula i polova su dati na sl. 2 i sl. 3, respektivno.

Opisanim postupkom, kao u postojećoj literaturi, se dolazi do realnih allpass filtera čiji su koeficijenti dati u tabeli 2. Međusobni odnos polova allpass sekcija i selektivnog polaznog filtra dati su na sl. 4.

Faze allpass filtera i amplitudska karakteristika filtra propusnika opsega  $A_1(z) - A_2(z)$  i fazna razlika, sa kojom je u direktnoj vezi, su prikazane na sl. 5 i sl. 6.

### IV. KOMPLEKSNA DEKOMPOZICIJA ISTE FILTERARKE FUNKCIJE

Za filtre propusnike/nepropusnike opsega frekvencija parnog reda  $N = 2(2K + 1)$ , čija je prototipska funkcija neparnog reda  $M = 2K + 1$  moguća pored realne i kompleksna dekompozicija pri čemu su allpass filtri istog reda  $N/2$ .

U ovom slučaju se uparuju kompleksni polovi, tj. za polove prenosne funkcije  $A_1'(z)$  se uzimaju polovi  $\lambda_{-3+4k}, k = 1, 2, \dots, (N+2)/4$  i  $\lambda_{4k}, k = 1, 2, \dots, (N-2)/4$  a za polove prenosne funkcije  $A_2'(z)$  se uzimaju polovi  $\lambda_{-1+4k}, k = 1, 2, \dots, (N-2)/4$  i  $\lambda_{-2+4k}, k = 1, 2, \dots, (N+2)/4$ , kako je pokazano na slici 7, tako da se dolazi do allpass filtera sa kompleksnim koeficijentima koji su prikazani u tabeli 3. Odgovarajuće fazne karakteristike su date na sl. 8.

TABELA 3: KOEFICIJENTI KOMPLEKSNIH ALLPASS FILTERA  $A_1'(z)$  I

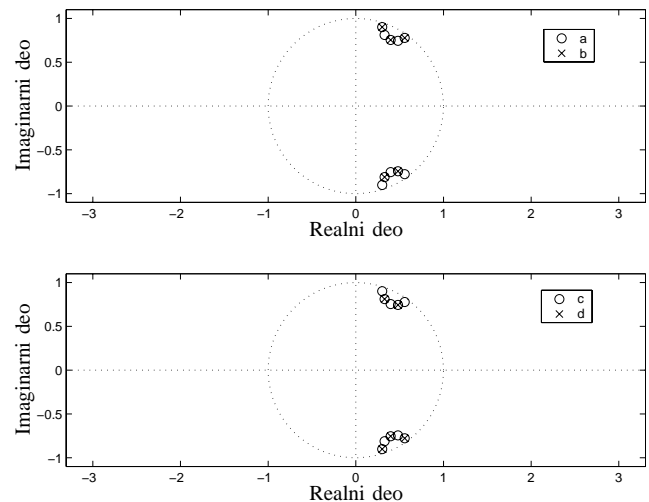
$A_2'(z)$ .

$\beta = -0.45139500187445 - j0.89232424167606$		
$i$	$a_{1,i}$	$a_{2,i}$
0	-0.271713592 - j0.534883136	-0.271713592 + j0.534883136
1	1.157714645 + j1.115452098	1.157714645 - j1.115452098
2	-2.223821787 - j1.937159877	-2.223821787 + j1.937159877
3	2.894618085 + j1.433351147	2.894618085 - j1.433351147
4	-2.064870594 - j0.878247095	-2.064870594 + j0.878247095
5	1.000000000	1.000000000

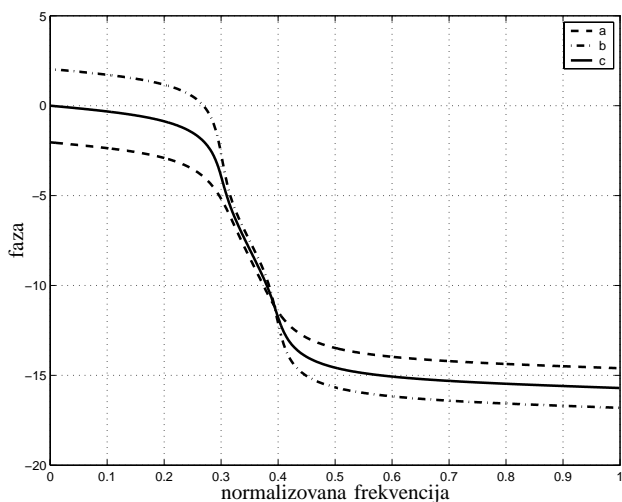
Ovako dobijene allpass sekcije ne poseduju nultu faznu razliku za  $z = 1$ , odnosno  $\pi rad$  u propusnom opsegu zbog čega njihova paralelna veza ne daje selektivan filter s obzirom na direktnu vezu između amplitude realizovanog filtra i fazne razlike

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sin \frac{\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)}{2} \right|. \quad (7)$$

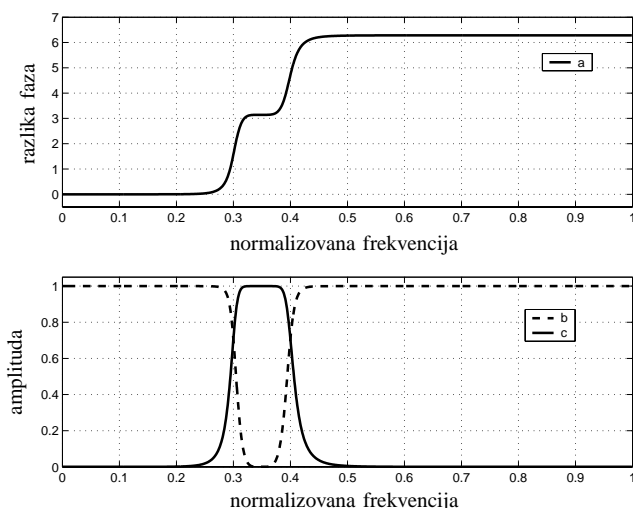
Koeficijenti dobijenih allpass sekcija  $A_1'(z)$  i  $A_2'(z)$  su međusobno konjugovano kompleksni zbog čega je  $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0)$ . Nulta fazna razlika za  $\omega = 0$  se dobija množenjem prenosnih funkcija kompleksnom konstantom  $\beta$  tj.  $A_1(z) =$



Sl. 7. Polovi Butterworth-ovog filtra (a),(c) i kompleksnih allpass filtera  $A_1(z)$  (b) i  $A_2(z)$  (d).



Sl. 8. Fazne karakteristike kompleksnih allpass filtera  $A_1'(z)$  (a),  $A_2'(z)$  (b) i Butterworth-ovog filtra (c)



Sl. 9. Razlika faza kompleksnih allpass filtera  $\beta^*A_1'(z)$  i  $\beta A_2'(z)$  (a) i amplitudske karakteristike komplementarnih filtera: nepropusnik opsega  $U(z)/X(z)$  (b) i propusnik opsega  $Y(z)/X(z)$  (c), dobijenih paralelnom vezom kompleksnih allpass filtera.

$\beta^*A_1'(z)$  i  $A_2(z) = \beta A_2'(z)$ . Konstanta  $\beta$  zadovoljava uslov  $|\beta| = 1$  ako se odredi iz uslova

$$\beta = e^{j\gamma}, \quad \gamma = \frac{\varphi_1(0) - \varphi_2(0)}{2}. \quad (8)$$

Amplitudske karakteristike realizovanih komplementarnih filtera su prikazane na sl. 9.

## V. ZAKLJUČAK

Standardnim metodama realizuju se rekurzivni digitalni filtri. Ukoliko rekurzivne filtarske funkcije ispunjavaju dodatne uslove postoje i ekonomična rešenja primenom paralelne veze allpass filtarskih sekcija. Tradicionalne digitalne Butterworth-ove, Chebyshev-ljeve i eliptičke filtarske funkcije ispunjavaju te uslove i mogu se uspešno realizovati dekompozicijom opisanom u ovom radu. U literaturi je detaljno proučena realizacija prototipskih dig-

italnih filtarskih funkcija. Za neparni red prototipskog digitalnog filtra postoji samo jedno rešenje gde allpass filtarske sekcije imaju realne koeficijente. U slučaju parnog reda prototipsko digitalnog filtra allpass dekompozicija ima kompleksne koeficijente a to je takođe jedino rešenje.

U ovom radu je opisan kompletan postupak za dekompoziciju IIR filtarske funkcije propusnika opsega frekvencija sa realnim i sa kompleksnim koeficijentima. Korišćenjem literature dobija se direktno realizacija sa realnim koeficijentima. Drugo moguće partikularno rešenje dekompozicije za filtarske funkcije propusnike opsega frekvencija predloženo u ovom radu ima kompleksne koeficijente.

Generalizacija dekompozicije je ilustrovana na primeru Butterworth-og IIR filtra propusnika opsega frekvencija desetog reda. Originalna dekompozicija sa kompleksnim koeficijentima je opisana u ovom radu i sa realnom dekompozicijom čini celinu za isti red filtra.

## LITERATURA

- [1] C. M. Rader and B. Gold, "Digital filter design techniques in frequency domain," *Proc. IEEE*, vol. 55, 1967.
- [2] S. Mitra, "Digital signal processing," *McGraw-Hill*, pp. 389–393, 1998.
- [3] P. P. Vaidyanathan, P. A. Regalia, and S. K. Mitra, "Design of doubly complementary iir digital filters using a single complex allpass filters with multirate applications," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-34, no. 4, pp. 378–389, 1987.
- [4] M. Lang and T. I. Laakso, "Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares phase error criterion," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, pp. 40–48, 1994.
- [5] M. Lang, "Allpass filter design and applications," *IEEE Trans. Sign. Process*, vol. 46, no. 9, pp. 2505–2514, 1998.
- [6] M. Ikehara, H. Tanaka, and H. Kuroda, "Design of iir digital filters using all-pass networks," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 41, no. 3, pp. 231–235, 1994.
- [7] R. Ansari and B. Liu, "A class of low-noise computationally efficient recursive digital filters with applications to sampling rate alterations," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc.*, vol. ASSP-33, no. 1, 1985.
- [8] J. S. Huang and S. S. Warwick, "Direct design of complex iir all-pass filters with approximately linear phase," *ECCTD'97 Proc.*, pp. 529–532, 1997.

## ABSTRACT

A method for decomposition of IIR bandpass filters is described in this paper. Decomposition of lowpass digital filters, is unique and obtained allpass filters are with real or complex coefficients for odd and even filters order, respectively. Complete decomposition of selective filter functions of bandpass type is given. Solutions with real and complex allpass coefficients for the same filter order are obtained. In other words, the same bandpass filter could be realized as parallel connection of two allpass sections, both with complex or real coefficients. This generalization of filter decomposition is explained for Butterworth bandpass filter of order  $N = 10$ . So, complex decomposition, with real coefficient decomposition well described in existing literature, of bandpass filters of the same order makes a whole. For odd order prototype filter functions only exist real coefficients decomposition.

## COMPLEX DECOMPOSITION OF BUTTERWORTH IIR BANDPASS FILTERS

Vlastimir D. Pavlović and Goran Z. Stančić