Analiza integralnih karakteristika Rejlijeve raspodele

Hana Popović[1], Zoran Popović[2], Dejan Blagojević[3], Vladimir Stefanović[3], i Dimitrije Stefanović[4]

***Sadržaj* — U ovom radu analiziran je Rejlijev model fedinga, tako što je Rejlijeva funkcija gustine verovatnoće (pdf) posmatrana kao opšti integral parcijalne diferenci-jalne jednačine, a zatim grafički utvrđeno da ista ta jedna-čina ima i dva singularna integrala. Njihova međuzavisnost se u daljem može iskoristiti za efikasniju procenu performan-si sistema, odnosno za određivanje prostije zavisnosti Rejlije-ve funkcije gustine verovatnoće od varijanse primljenog signala, odnosno za analizu maksimuma funkcije raspodele.**

***Ključne reči* — direktna linija optičke vidljivosti, LOS, funkcija gustine verovatnoće, pdf, Rejlijev model fedinga, diferencijalna jednačina, partikularni integral.**

I. Uvod

STATISTIČKI modeli bežičnih kanala koriste se za opisivanje različitih efekata, kao što su prostiranje talasa po više putanja (multipath propagation) i efekat senke (shadowing). Inače, signal se kroz bežični medijum prostire po više putanja, usled refleksije, difrakcije i rasejanja talasa od objekata koji se nalaze na putanji predajnik-prijemnik [1, 2], pri čemu je najbitnija refleksija pri odbijanju talasa od glatkih površina, čije su dimenzije mnogo veće od talasne dužine. U tom se slučaju iza prepreka formiraju sekundarni talasi, koji omogućavaju komunikaciju između predajnika i prijemnika čak i u slučaju kada između njih ne postoji linija direktne optičke vidljivosti (LOS – Line of Sight). Pri tome, jasno, dolazi i do određene difrakcije i disperzije talasa, odnosno do njihovog rasejavanja pri prostiranju kroz sredine u kojima se nalazi veliki broj objekata, dimenzija malih u poređenju sa talasnom dužinom. Sve interakcije talasa sa objektima koji im se nalaze na putu prouzrokuju da na ulaz prijemnika stiže veliki broj kopija poslatog signala, koje se razlikuju po slabljenju, kašnjenju i faznom pomeraju. Njihova superpozicija na mestu prijema uzrokuje da signal na prijemu ima vremenski promenljivu amplitudu i fazu, što se još više ispoljava kada se predajnik i/ili prijemnik kreću, što je uobičajeni slučaj u modernim mobilnim i avio telekomunikacijama [3,4].

1. Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu, Vojvode Stepe 283, 11000 Beograd, Srbija; (e-mail: hanap@eunet.yu).

2. Tehnički fakultet Čačak, 32000 Čačak, Srbija (tel.: 381-63-228810; e-mail: a33@eunet.yu).

3. Visoka Tehnička Škola Strukovnih Studija, 18000 Niš, Srbija (tel.: 381-18-588211; faks: 381 18 588211; e-mail: blagojevićd70@ yahoo.com).

4. Elektronski fakultet Niš, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (tel. 381-18-529662; e-mail: vule@elfak.ni.ac.yu.

Svi ovi uslovi prostiranja, uzrokuju statističko ponašanje karakteristika signala, koje se analizira korišćenjem višepropagacionih modela, kao što su Rejlijev, Rajsov i Nakagami model. Rejlijev stohastički model koristi se u urbanim i gusto naseljenim sredinama, u kojima najčešće ne postoji optička vidljivost između predajnika i prijemnika [5, 6], dok se njegovi kvaliteti gube kada se radi o ruralnim i suburbanim zonama. U tom slučaju postojanja izraženog signala duž linije optičke vidljivosti (LOS) uslovljava korišćenje Rajsovog modela, pa se češće koristi i matematički jednostavniji Nakagami model fedinga, koji se pogodnim izborom parametara uvek može svesti i na Rejlijev i na Rajsov model [7, 8].

U ovom radu analizirali smo Rejlijev model kanala, polazeći od opisa Rejlijevog slučajnog procesa, i primenjujući iste metode analize kao i u našim ranijim radovima koji se odnose na Rajsov [9, 10] i Nakagami [11, 12] model. U vezi s tim, numerički su analizirane integralne karakteristike funkcije gustine verovatnoće u okviru Rejlijevog modela. Pri tome su dobijeni rezultati koji su u potpunoj saglasnosti sa rezultatima koji se odnose na integralna svojstva Rajsove i Nakagamijeve raspodele, a, što je najvažnije, utvrđena je, takođe, i egzistencija singularnih rešenja odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačine. Do njih se, kao što je poznato iz teorije diferencijalnih jednačina, može doći samo analitičko-numeričkom i grafičkom analizom, koja je, takođe, predmet rada.

II. Rejlijev model fedinga

Rejlijeva raspodela definisana je na osnovu posmatranja anvelope zbira velikog broja sinusnih talasa različitih učestanosti, tako da opisuje fluktuacije anvelope primljenog signala u prisustvu fedinga koji nastaje usled efekta višestruke propagacije talasa u okruženjima u kojima ne postoji linija direktne optičke vidljivosti između predajnika i prijemnika. Pri tome se uobičajeno podrazumeva da na mestu prijema dolazi suma signala slučajnih amplituda istog reda veličine, tj. da nema dominantne komponente, što za Rejlijevu slučajnu promenljivu odgovara i anvelopi uskopojasnog šuma.

Slučajna promenljiva koja ima Rejlijevu raspodelu definisana je kao kvadratni koren zbira kvadrata dve statistički nezavisne Gausove raspodele, odnosno:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 , \qquad (1)$$

gde su x_1 i x_2 nezavisni Gausovi slučajni procesi sa srednjom vrednošću nula i varijansom σ^2.

Združena funkcija gustine verovatnoće Gausovih slučajnih promenljivih x_1 i x_2 je:

$$p_{x_1x_2}\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2}$$

Transformacijom koordinata $\left(x_1,x_2\right)$ u polarne $\left(r,\theta\right)$, i koristeći jednakosti $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\theta=arctg(x_2/x_1)$ dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned}x_1&=r\cdot\cos\theta\\x_2&=r\cdot\sin\theta\end{aligned} \tag{3}$$

pri čemu je $r\geq 0$ i $|\theta|\leq\pi$. Združena funkcija gustine verovatnoće promenljivih r i θ je:

$$p_{r\theta}\left(r,\theta\right)=|\mathrm{J}|\,p_{x_1x_2}\left(r\cdot\cos\theta,r\cdot\sin\theta\right) \tag{4}$$

pri čemu Jakobijan transformacije ima vrednost $|\mathrm{J}|=r$. Na osnovu toga je:

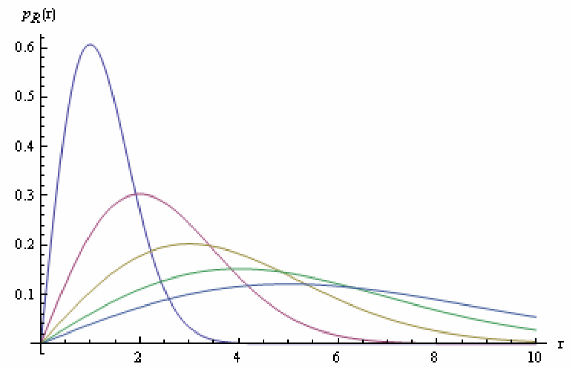
$$p_{r\theta}\left(r,\theta\right)=r\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{5}$$

Integracijom se dobija funkcija gustine verovatnoće Rejlijevog procesa:

$$p_r\left(r\right)=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\cdot p_{r\theta}\left(r,\theta\right)=\frac{r}{\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

III. Numerička analiza Rejlijeve funkcije gustine verovatnoće

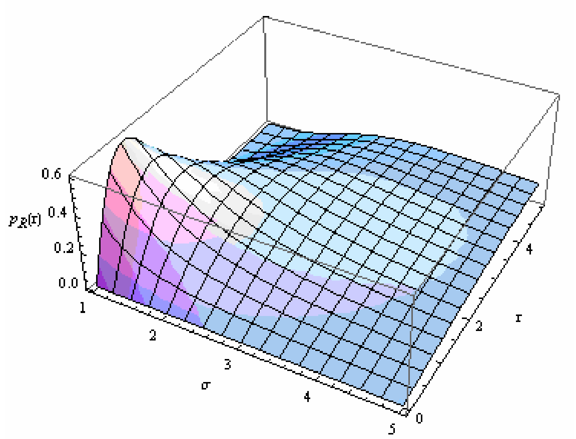
Grafički prikazujući (sl. 1) zavisnosti Rejlijeve funkcije gustine verovatnoće od nivoa signala *r,* za različite vrednosti standardne devijacije *σ*, određene jedn. (6) dolazi se do uobičajenog prikaza sa koga se uočava da se radi o familiji krivih, određenih parametrom *σ*.



Sl. 1. Zavisnost Rejlijeve pdf od nivoa primljenog signala za $\sigma=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Takođe, ukoliko se parametar *σ* posmatra kao nezavisno promenljiva dolazi se do trodimenzionalne zavisnosti funkcije gustine verovatnoće Rejlijevog procesa (sl. 2).

Prostom analizom, uočava se da sa porastom standardne devijacije maksimumi Rejlijeve pdf opadaju, s tim što se te vrednosti dostižu pri većoj vrednosti nivoa signala na prijemu.

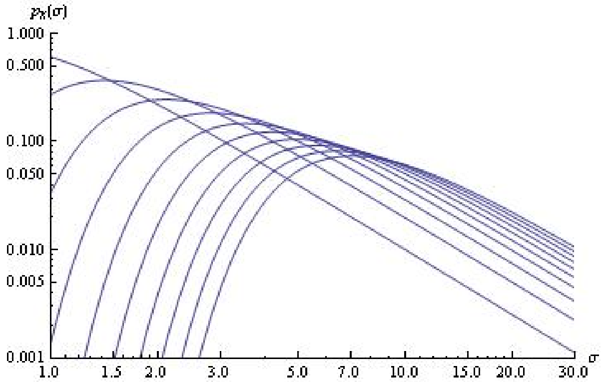


Sl. 2. Trodimenzionalni prikaz Rejlijeve pdf.

Maksimumi Rejlijeve pdf dostižu se za vrednosti $r=\sigma$, odakle se dobija da je:

$$p_\sigma(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}\cdot\sigma} \tag{7}$$

Za nas je posebno interesantna logaritamska zavisnost Rejlijeve funkcije gustine verovatnoće od standardne devijacije *σ* (sl. 3), s obzirom da se sa nje jasno uočava egzistencija obvojnice za datu familiju krivih.



Sl. 3. Zavisnost Rejlijeve pdf od standardne devijacije u logaritamskoj razmeri.

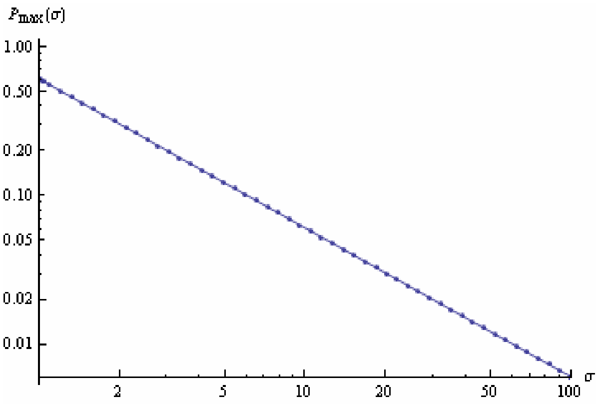
Naime, ako se posmatranim raspodelama pristupi kao odgovarajućim familijama krivih [9, 11], pri čemu je parametar raspodele *r* istovremeno i parametar posmatrane familije krivih, može se konstatovati i postojanje odgovarajuće obvojne krive pomenute familije. Svaka od krivih u okviru familije predstavlja partikularno rešenje parcijalne diferencijlane jednačine.

Obvojnica familije krivih (sl. 3) u našem se slučaju može aproksimirati jednačinom oblika:

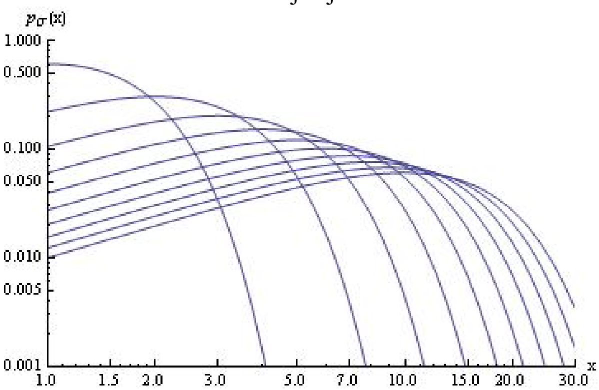
$$\log\left(\max p_\sigma(\sigma)\right)=-\frac{1}{2}-\log\left(\sigma\right) \tag{8}$$

odnosno linearnom funkcijom (sl. 4).

Ponavljajući postupak za slučaj zavisnosti Rejlijeve pdf od *σ*, a uzimajući *r* kao parametar (sl. 5), uočava se da sa porastom parametra *r* vrednosti maksimuma pdf monotono opadaju i da krive familije postaju sve šire, ali i da prate određene pravilnosti u odnosu na oblik funkcije.



Sl. 4. Zavisnost maksimuma Rejlijeve pdf od standardne devijacije.



Sl. 5. Zavisnost Rejlijeve pdf od $x = \sigma$, kada se r posmatra kao parametar, u logaritamskoj razmeri.

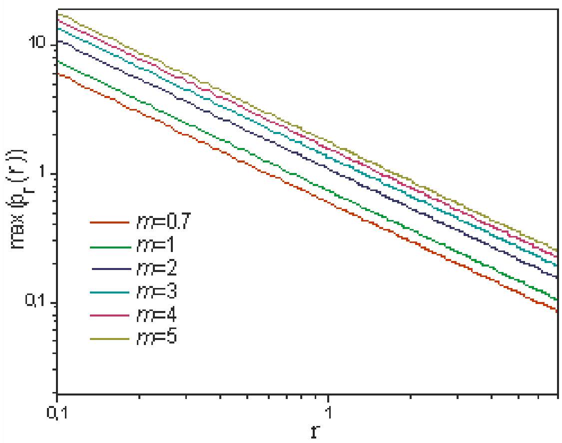
Takođe, kao i u prethodnom slučaju, posmatranim raspodelama možemo pristupiti kao familiji krivih, gde je parametar raspodele r istovremeno i parametar te familije krivih. Pri tome se (sl. 5), opet konstatuje egzistencija odgovarajuće obvojnice krivih pomenute familije, pri čemu se svaka od krivih familije može smatrati partikularnim rešenjem parcijalne diferencijlane jednačine. Obvojnica posmatrane familije krivih može se aproksimirati odgovarajućom jednačinom oblika sličnog jedn. (8).

Numerički proračuni i grafički dvodimenzionalni prikazi Rejlijeve pdf, kada se ona posmatra kao opšti integral parcijalne diferencijalne jednačine, ukazuju na egzistenciju najmanje dva singularna integrala, određenih jedn. (8).

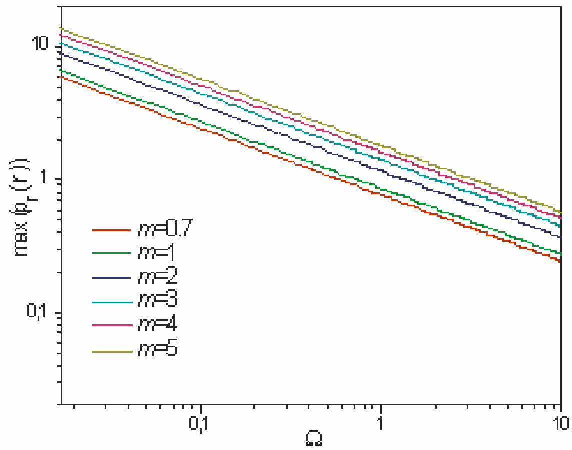
Poredeći dobijene rezultate, sa rezultatima dobijenim za Nakagami-m model fedinga [11, 12], opisan funkcijom gustine verovatnoće:

$$p_r\left(r\right) = \frac{2}{\Gamma\left(m\right)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m r^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}r^2}, r > 0, m \geq \frac{1}{2} \quad (9)$$

gde je m parametar dubine fedinga (fading figure), Ω srednja snaga signala, a $\Gamma(.)$ gama funkcija, koji se za m=1 svodi na Rejlijev model, zaključujemo da, u ovom radu analizirana, singularna rešenja, tj. obvojne krive predstavljaju poseban slučaj Nakagami-m pdf (sl. 6 i 7).



Sl. 6. Zavisnost maksimuma Nakagami-m pdf od nivoa primljenog signala.



Sl. 7. Zavisnost maksimuma Nakagami-m pdf od srednje snage signala.

Prema tome, slučaj m=1 koji odgovara Rejlijevom fedingu, kao specijalan slučaj Nakagami-m modela, ukazuje na isti koren fizičkih fenomena koji uzrokuju fedinge dobijene eksperimentalnim analizama prostiranja signala u različitim uslovima, što će biti predmet naših daljih analiza.

Posebnu pažnju trebalo bi obratiti na položaje makismuma pdf funkcija Rejlijeve raspodele u okviru pomenutih familija krivih, s obzirom da maksimumi pdf u prvom od dvodimenzionalnih grafika (sl. 1) određuju tačke obvojnice na drugom od dvodimenzionalnih grafika (sl. 5), i da maksimumi na drugom (sl. 5) predstavljaju tačke na obvojnici u prvom (sl. 1). To matematički potvrđuje našu tvdrnju da egzistiraju obvojne krive, koje su istovremeno i singularni integrali parcijalne diferencijalne jednačine čiji opšti integral predstavlja sama Relijeva funkcija raspodele pdf. To ukazuje na određenu međusobnu korelaciju nezavisno promenljivih parametara Relijeve raspodele, čijim bi se utvrđivanjem mogli u mnogome uprostiti složeni proračuni momenata raspodele, veoma korisni za analizu signala u konkretnim telekomunikacionim sistemima, pogotovu imajući u vidu da u postojećim matematičkim izrazima figurišu složene funkcije.

IV. ZAKLJUČAK

Analizom integralnih karakteristika funkcije gustine verovatnoće, koja je vrlo važna sa aspekta teorijske procene pokazatelja performansi, verovatnoće greške po bitu (Bit Error Rate – BER) i verovatnoće otkaza sistema (Outage Probability), preko uslova međusobne korelacije parametara pokazane u našem radu, a koji figurišu u Relijevom modelu fedinga, moguće je u mnogome uprostiti analize postojećih telekomunikacionih sistema.

LITERATURA

[1] J. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1999.

[2] M.K. Simon, M.S. Alouni, *Digital Communications over Fading Channels: A Unified approach to performance analysis*, John Wiley, New York, 2000.

[3] D. Drajić, *Uvod u statističku teoriju telekomunikacija*, Akademska misao, Beograd, 2003.

[4] W.Y.C. Lee, *Mobile Cellular Communications,* McGraw-Hill Book Co., New York, 1989.

[5] M. Nakagami, *The m-distribution, a General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading in Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W.G. Hoffman, ed. Oxford, England: Pergamon, 1960.

[6] N. Youssef, T. Munakata, M. Takeda, *"Fade Statistics in Nakagami Fading Environments", Proc. IEEE 4th Int. Symp. Spread Spectrum Techniques & Applications*, pp. 1244-47, Mainz, Germany, 1996.

[7] R.H. Clarke, "A Statistical Theory of Mobile Radio Reception", *Bell Systems Technical Journal*, **47**, 957 – 1000 (1968).

[8] R. Price, P.E. Green, *"A Communication Technique for Multipath Channels", Proceedings of the IRE*, pp. 555-70, March 1958.

[9] A.Mitić. D.Č. Stefanović, D. Blagojević, and S. Veljković, *"The analysis of Rician PDF integral properties from DSRC system viewpoint", ICEST 2007, Zbornik radova,* vol. 1, 295 – 297 (June 2007).

[10] D.Č. Stefanović, A. Mitić, D. Blagojević, and S. Veljković, *"The some Specific Propeties of Rician PDF integral and possibiliti of its application in modeling of ITS infrastructures", Telsiks 2007, Zbornik radova,* vol. 2, 513 – 516 (September 2007).

[11] H. Popović, A. Mitić, I. Stefanovic, and D.Č.Stefanović, *"Some integral properties of Nakagami m distribution", ICEST 2007, Zbornik radova,* vol. 1, 299 – 302 (June 2007).

[12] H. Popović, A. Mitić, I. Stefanović, D.Č. Stefanović, *"Some statistical charachteristics of Nakagami m distribution", TELSIKS 2007, Zbornik radova,* vol. 2, 509 – 512 (September 2007).

ABSTRACT

In this paper, study of statistical characteristics of the Rayleigh fading channel model is considered. For analytical and numerical evaluation of system performance, the Rayleigh probability density functions (pdf) are analyzed like particular solutions of corresponding differential equation. The existence of singular solution is considered and analyzed under different conditions.

SOME INTEGRAL PROPERTIES OF RAYLEIGH DISTRIBUTION

Hana Popović[1], Zoran Popović[2], Dejan Blagojević[3], Vladimir Stefanović[3], Dimitrije Stefanović[4]