

Primena wavelets transformacije na sinusnom test signalu

Stefan Panić, Aleksandar Mosić, Zoran Perić, Jelena Nikolić, Elektronski fakultet u Nišu

Sadržaj – U ovom radu dat je detaljan opis postupka wavelets transformacije (WT tj. transformacije pomoću talasića) koji je ilustrovan u slučaju kada se na ulaz prenosnog sistema dovodi sinusni test signal. Poređenjem performansi opisanog prenosnog sistema sa performansama PCM i višestepene delta modulacije utvrđena je valjanost primenjenog postupka, tj. istaknut je značaj primene wavelets transformacije u obradi signala.

Ključne reči – Lifting algoritam, sinusni test signal, wavelets transformacija.

I UVOD

TALASIĆI su razvijeni nezavisno u matematici, kvantnoj fizici, elektrotehnici i seizmičkoj geologiji. Razmenom ideja nastalih u ovim oblastima došlo se do novih primena talasića poslednjih tridesetak godina. Primeri novih primena su modelovanje turbulencije, predviđanje zemljotresa, istraživanja udaljenih galaksija i nama najinteresantnija primena u obradi signala [1], [2].

Stoga, u ovom radu opisujemo postupak wavelets transformacije i istražujemo da li se njegovom primenom pri digitalizaciji sinusnog test signala ostvaruje dobitak u odnosu na PCM tehniku i višestepenu delta modulaciju (VDM). Rad se u najvećoj meri oslanja na istraživanja Desanke Radunović i Jelene Kovačević u oblasti talasića [1], [2] i Georgija Lukatele u oblasti digitalnih telekomunikacija [3]. U radu je najpre opisana wavelets transformacija (II deo), a zatim je primenom multirezolucijske analize i lifting algoritma izvršena dekompozicija sinusnog test signala, odnosno njegova kompresija i određeni su koeficijenti koji nose informaciju o ulaznom signalu. Ovi koeficijenti su zatim uniformno kvantovani i preneti do prijemnika u kome je izvršena rekonstrukcija sinusnog test signala. Performanse prenosnog sistema (najčešće merene odnosom signal-šum tj. SNR) određene su na osnovu odstupanja ulaznog sinusnog test signala od rekonstruisanog signala. Doprinos rada istaknut je u delu III, u kome je izvršeno poređenje performansi prenosnih sistema za slučaj primene postupka wavelets transformacije, višestepene delta modulacije i impulsno kodovane modulacije.

Stefan Panić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (telefon: 381-63-470-649; e-mail: stefanpnc@yahoo.com).

Aleksandar Mosić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija, (e-mail: sknme@ptt.yu).

Prof. dr Zoran Perić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija, (e-mail: peric@elfak.ni.ac.yu).

mr Jelena Nikolić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija, (e-mail: njelena@elfak.ni.ac.yu).

II WAVELETS TRANSORMACIJA DISKRETIZOVANOG SINUSNOG TEST SIGNALA

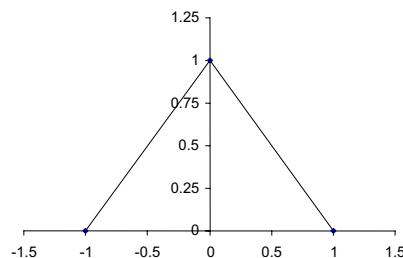
Wavelets transformacija je veoma popularan pristup za dekompoziciju signala. Zapravo, ona predstavlja prirodni nastavak Fourier-ove transformacije i njene modifikacije Kratkotrajne Fourier-ove transformacije. Osnovna ideja wavelets transformacije bazira se na korišćenju visoke frekvencijske rezolucije na niskim frekvencijama i visoke vremenske rezolucije na višim frekvencijama, što omogućava vremensku i frekvencijsku lokalizaciju [2].

Wavelets transformacija je definisana pomoću funkcije skaliranja i funkcije majke talasića. U ovom radu opredelili smo se da razmatramo funkciju skaliranja, $\varphi(x)$, opisanu krov funkcijom koja je prikazana na Sl. 1 i definisana izrazom:

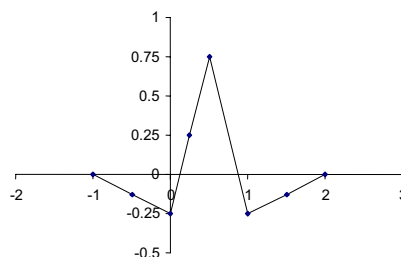
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in [0, +1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad (1)$$

dok smo funkciju majke talasića, $\psi(x)$, prikazanu na Sl. 2 definisali izrazom [1]:

$$\psi(x) = \varphi(2x-1) - \frac{1}{4}\varphi(x) - \frac{1}{4}\varphi(x-1). \quad (2)$$



Sl. 1. Funkcija skaliranja $\varphi(x)$



Sl. 2. Funkcija majke talasića $\psi(x)$

Definisanjem funkcije skaliranja i funkcije majke talasića definisan je i multirezolucijski razvoj funkcije $f(x)$ [1]:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (3)$$

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k), \quad (4)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad (5)$$

pri čemu je [1]:

$$a_{j,k} = (f, \varphi_{j,k}) = \int_{D_{\varphi_{j,k}}} f(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)} dx, \quad (6)$$

$$b_{j,k} = (f, \psi_{j,k}) = \int_{D_{\psi_{j,k}}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx, \quad (7)$$

gde se indeksi j i k odnose na rezoluciju (skaliranje, tj. kompresiju ili dekompresiju) i transliranje respektivno, $D_{\varphi_{j,k}}$ i $D_{\psi_{j,k}}$ su domeni (kompaktni nosači) odgovarajućih bazisnih funkcija, a koeficijent $2^{-j/2}$ predstavlja faktor normiranja. Pošto je u [1] pokazano da se faktor normiranja može izostaviti možemo usvojiti sledeće oblike funkcija $\varphi_{j,k}(x)$ i $\psi_{j,k}(x)$:

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^{-j}x - k), \quad (8)$$

$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^{-j}x - k). \quad (9)$$

A. Aproksimacija za rezoluciju $j=-1$

Posmatrajmo primenu wavelets transformacije na sinusnom test signalu jedinične amplitude koji je u opsegu $[0, \pi]$ uzorkovan sa $N=16$ odmeraka. Opredelili smo se da najpre razmatramo slučaj kada je $j=-1$, a zatim da primenimo lifting algoritam [1], tj. talasiće druge generacije. Jedan korak lifting algoritma sastoji se od tri operacije: podele, procene i popravke. Naime, po lifting algoritmu najpre se vrši podela diskretizovanog sinusnog test signala $\mathbf{X}=\{x_k\}$, $k \in Z$, na dva disjunktna skupa $\mathbf{X}_a=\{x_{2k}\}$ i $\mathbf{X}_b=\{x_{2k+1}\}$. Zatim se vrši procena, tj. podacima iz jednog skupa procenjuju se podaci iz drugog skupa. Tako koeficijente talasića za rezoluciju $j=-1$ dobijamo uz pomoć sledeće formule [1]:

$$b_{-1,k} = x_{2k+1} - \frac{1}{2}(x_{2k} + x_{2k+2}). \quad (10)$$

Poslednji korak algoritma je popravka koji se vrši u cilju očuvanja srednje vrednosti skupa odmeraka \mathbf{X}_a [1]:

$$a_{-1,k} = x_{2k} + \frac{1}{4}(b_{-1,k-1} + b_{-1,k}). \quad (11)$$

Korišćenjem (10) i (11) za celobrojne vrednosti k u opsegu od 0 do 7 odredili smo skup koeficijenata $b_{-1,k}$ i $a_{-1,k}$, koji su prikazani u Tabeli 1.

B. Aproksimacija za rezoluciju $j=0$

Po lifting algoritmu izlazna aproksimacija \mathbf{a} , prethodnog rezolucionog nivoa se uzima kao ulazni signal \mathbf{X} tekućeg rezolucionog nivoa [1], a koeficijenti se dobijaju na identičan način kao u prvom koraku algoritma. Korišćenjem vrednosti koeficijenata iz Tabele 1, kao i formula (10) i (11), jednostavno se proračunavaju koeficijenti za rezoluciju $j=0$ (Tabela 2).

Kombinovanjem (1), (2) i (3), pri čemu je $f(x)=y_k^{WT}$, možemo izvršiti rekonstrukciju odmeraka x_0 :

$$y_0^{WT} = \hat{a}_{0,0} \cdot (1) + \hat{b}_{-1,0} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \hat{b}_{-1,1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \hat{b}_{0,0} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \hat{b}_{0,-1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right), \quad (12)$$

pri čemu vrednosti u zagradama odgovaraju vrednostima funkcija skaliranja i majke talasića u tački koja odgovara položaju posmatranog nultog odmerka. Na osnovu ovog izraza može se sagledati uticaj susednih talasića i funkcija skaliranja na rekonstrukciju datog odmerka. Slično se može pokazati i uticaj susednih talasića i funkcija skaliranja na rekonstrukciju ostalih odmerka. Vrednosti sa kapicom su kvantovane vrednosti odgovarajućih koeficijenata dobijene uniformnom kvantizacijom, pri čemu se korak kvantizacije korišćenog kvantizera određuje na osnovu [4]:

$$\Delta = \frac{2A_Q}{2^n}, \quad (13)$$

gde je A_Q amplituda maksimalnog opterećenja kvantizera, koja definiše amplitudski opseg kvantizera, a n bitska brzina. U radu razmatramo slučaj kada se za kvantovanje $a_{j,k}$ koeficijenta koristi $n_a=8$ bita, dok se za $b_{j,k}$ koeficijente koristi $n_b=4$ bita.

III POREĐENJE PERFORMANSI WAVELET, PCM I VIŠESTEPENE DELTA MODULACIJE

Performanse prenosnog sistema najčešće su određene odnosom signal/šum SNR (signal to noise ratio) koji se definiše sa [3], [4]:

$$SNR = 10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_N^2} \quad (14)$$

i izražava u dB, pri čemu σ^2 predstavlja snagu ulaznog signala a σ_N^2 je snaga šuma koji je unet u posmatranom prenosnom sistemu. Korišćenjem odmerenih vrednosti test signala jedinične amplitude u opsegu $[0, \pi]$, datih u Tabeli 3, jednostavno se određuje numerička vrednost snage ulaznog signala [3]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2, \quad (15)$$

koja iznosi $\sigma^2=0,499999$. Određivanjem numeričke vrednosti snage šuma unete wavelets transformacijom na osnovu izraza [1], [2]:

$$\sigma_N^{2WT} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - y_k^{WT})^2, \quad (16)$$

$(\sigma_N^{WT})^2=3,3582061 \cdot 10^{-6}$, jednostavno se određuje i numerička vrednost odnosa signal-šum koja iznosi $SNR^{WT}=51,728626$ dB.

Da bi ukazali na značaj wavelets transformacije određujemo i performanse prenosnih sistema u kome su primenjeni postupci impulsno kodovane modulacije (PCM) kao i višestepene delta modulacije (VDM), a zatim poredimo proračunate performanse. Neka izlaz prenosnog sistema u kome je primenjen PCM postupak, označen sa y_k^{PCM} , predstavlja kvantovanu vrednosti odmerka x_k . Da bi performanse posmatranog sistema bile uporedive sa performansama sistema u kome je primenjen postupak wavelets transformacije, kvantovane vrednosti y_k^{PCM} moraju predstavljati izlaz uniformnog kvantizera sa 256 nivoa kvantovanja (bitska brzina $n^{PCM}=8$). Slično, za slučaj kada je primenjen postupak VDM, kvantovana vrednost tekućeg odmerka x_k , označena sa y_k^{VDM} (određena sabiranjem kvantovane vrednosti razlike dva susedna

odmerka sa kvantovanom vrednošću y_{k-1}^{VDM} , određenom u predhodnom intervalu kvantovanja) mora predstavljati izlaz uniformnog kvantizera čiji se broj nivoa kvantovanja $2^{n^{VDM}}$ određuje na osnovu:

$$n^{VDM} \cdot N = n_a \cdot N_a + n_b \cdot N_b, \quad (17)$$

pri čemu je $N_a = 4$ i $N_b = 12$ (broj $a_{j,k}$ i $b_{j,k}$ koeficijenta respektivno). Na osnovu poslednje jednačine jednostavno dolazimo do rezultata da je potrebna bitska brzina $n^{VDM} = 5$ bita. Važno je naglasiti da je u poslednjem slučaju amplitudski opseg određen maksimalnom vrednošću signala diferencije susednih odmeraka tako da kvantizer ne bude preopterećen strminom (opseg kvantovanja je 0,2).

Računanjem snage šuma unete postupkom PCM (za slučaj kada su korišćena $n^{PCM} = 8$ bita) na osnovu izraza [4]:

$$\sigma_N^{2PCM} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - y_k^{PCM})^2, \quad (18)$$

$(\sigma_N^{PCM})^2 = 3,3582061 \cdot 10^{-6}$, možemo odrediti i numeričku vrednost odnosa signal-šum $SNR^{PCM} = 47,139011$ dB. Ukupan dobitak Wavelets transformacije u odnosu na klasičnu PCM, označen sa g^{PCM} , se određuje uz pomoć izraza:

$$g^{PCM} = \frac{N \cdot n^{PCM} - (N_a \cdot n_a + N_b \cdot n_b)}{N} + \frac{SNR^{WT} - SNR^{PCM}}{6,01dB/bit}, \quad (19)$$

i iznosi 3,763663 bit/odmerku.

Slično, računanjem snage šuma unete postupkom VDM (za slučaj kada su razlike između dva susedna odmerka kodovane sa $n^{VDM} = 5$ bita) na osnovu izraza [4]:

$$\sigma_N^{2VDM} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - y_k^{VDM})^2, \quad (20)$$

$(\sigma_N^{VDM})^2 = 1,4007974 \cdot 10^{-5}$, možemo odrediti i numeričku vrednost odnosa signal-šum $SNR^{VDM} = 45,52594$ dB, kao i ukupan dobitak wavelets transformacije u odnosu na višestepenu delta-modulaciju, označen sa g^{VDM} :

$$g^{VDM} = \frac{N \cdot n^{VDM} - (N_a \cdot n_a + N_b \cdot n_b)}{N} + \frac{SNR^{WT} - SNR^{VDM}}{6,01dB/bit}, \quad (21)$$

koji iznosi 1,0320599 bit/odmerku. Dobijeni rezultati ukazuju na očiglednu prednost primene WT u odnosu na PCM i VDM.

TABELA 1: KOEFICIJENTI TALASIĆA ZA REZOLUCIJU $J=-1$

k	$b_{-1,k}$	$a_{-1,k}$
0	$3,7486 \cdot 10^{-3}$	0
1	$10,6751 \cdot 10^{-3}$	0,3863
2	$15,9765 \cdot 10^{-3}$	0,7138
3	$18,8454 \cdot 10^{-3}$	0,9326
4	$18,8454 \cdot 10^{-3}$	1,0094
5	$15,9765 \cdot 10^{-3}$	0,9326
6	$10,6751 \cdot 10^{-3}$	0,7138
7	$3,7486 \cdot 10^{-3}$	0,3863

TABELA 2: KOEFICIJENTI TALASIĆA ZA REZOLUCIJU $J=0$

k	$b_{0,k}$	$a_{0,k}$
0	$29,4502 \cdot 10^{-3}$	0
1	$70,9887 \cdot 10^{-3}$	0,7389
2	$70,9887 \cdot 10^{-3}$	1,0449
3	$29,4502 \cdot 10^{-3}$	0,7389

TABELA 3: VREDNOSTI ODMERAKA SINUSNOG TEST SIGNALA

k	x_k	y_k^{PCM}	y_k^{VDM}	y_k^{WT}
0	0	0,0020	0	0,0020
1	0,1951	0,1934	0,1969	0,1973
2	0,3827	0,3809	0,3875	0,3842
3	0,5556	0,5527	0,5594	0,5581
4	0,7071	0,7081	0,7125	0,7097
5	0,8315	0,8340	0,8344	0,8321
6	0,9239	0,9277	0,9250	0,9227
7	0,9808	0,9824	0,9844	0,9793
8	1	0,9980	1,0062	0,9994
9	0,9808	0,9824	0,9844	0,9793
10	0,9239	0,9277	0,9250	0,9227
11	0,8315	0,8340	0,8344	0,8321
12	0,7071	0,7081	0,7125	0,7097
13	0,5556	0,5527	0,5594	0,5581
14	0,3827	0,3809	0,3875	0,3842
15	0,1951	0,1934	0,1969	0,1973

IV ZAKLJUČAK

Prednosti Wavelets transformacije u odnosu na klasičnu PCM i VDM pokazane su na primeru sinusnog test signala. Zaprvo, istaknuta je prednost wavelets transformacije koja se ogleda u korišćenju korelacije između susednih podataka u signalu. U radu je korišćen lifting algoritam kojim je ostvarena značajna kompresija podataka koji nose informaciju o signalu. Utvrđen je međusobni uticaj susednih funkcija skaliranja i talasića na posmatrani odmerak pri rekonstrukciji, a zatim je izvršena procena performansi prenosnog sistema. Pokazano je značajno poboljšanje performansi, tj. ostvarena je kompresija u odnosu na PCM i VDM od 3,763663 bita/odmerku i 1,0320599 bita/odmerku, respektivno za slučaj ulaznog sinusnog test signala. Verujemo da se sličan ili čak i veći doprinos može postići korišćenjem ulaznog signala drugog oblika ili optimalnijim izborom funkcija skaliranja i majke talasića.

LITERATURA

- [1] D. Radunović, *Talasići*, Akademski misao, Beograd, 2005.
- [2] M. Vetterli, J. Kovacevic, V. Goyal, *Wavelets for Signal Processing*, Lecture notes.
- [3] G. Lukatela, D. Drajić, G. Petrović, R. Petrović, *Digitalne telekomunikacije*, Građevinska knjiga, Beograd 1981.
- [4] N. Jayant, P. Noll, *Digital coding of waveforms-Principles and Applications to Speech and Video*, Prentice-Hall, New Jersey, 1984., Chapter 4, pp. 129-139.
- [5] Khalid Sayood, *Introduction to Data Compression*, Third Edition, Elsevier Inc. 2006.

ABSTRACT

In this paper a detail description of wavelets transformation (WT) procedure is provided and illustrated for the sine test signal. The validity of this procedure is determined, by comparing the performances of described transmission system with the performances of PCM, and multiple delta modulation, pointing in such a way the goodness of applying WT in signal processing.

APPLIANCE OF WAVELETS TRANSFORMATION ON SINE TEST SIGNAL

Stefan Panić, Aleksandar Mosić, Zoran Perić, Jelena Nikolić, Faculty of Electronic Engineering, Niš