Пример испитивања конвергенције линеарног хибридног система за праћење циљева

Звонко Радосављевић

***Садржај* — За стохастички линеарни хибридни систем се каже да је обсервабилан, ако је хибридно стање на улазу једнозначно одређено из његових излаза. У раду је предложена нова, ефикаснија метода испитивања конвергенције параметара стохастичког линеарног хибридног система, која се базира на познатој методи са експоненцијалном расподелом грешке, добијена развојем експоненцијалне функције у ред. У раду се дефинишу опптималне вредности параметара система. Презентирани теоријски модел је испитан на конкретном примеру система за праћења борбеног авиона.**

***Кључне речи* — обсервабилност, контролабилност, стохастички линеарни хибридни систем.**

I. Увод

Праћење трајекторије авиона је проблем који се решава коришћењем дискретних хибридних система. Појам обсервабилности система је његова способност да реконструише почетно стање на бази мерења излазних променљивих, односно систем је потпуно обсервабилан ако се свака промена његовог стања одражава на свим излазним променљивим . Због значаја за ефикасан рад система, овај проблем је широко обрађен у литератури [1,2] касније [3,4]. За стохастичке системе без утицаја шума проблем обсервабилности разматрао је Калман. У раду се разматра систем са утицајем Гаусовог шума, и презентована је позната метода за испитивање конвергентности алгоритма (пример ИММ алгоритма). На основу ње, предложена је нова метода, базирана на развоју у Тејлоров ред презентовае функције грешке. Рад је организован на следећи начин. После уводних разматрања, Друга глава је посвећена дефинисању општих релација и услова обсервабилности, на основу познатих параметара система. Трећа глава је посвећена условима конвергентности алгоритма и извођењу потребних услова који то обезбеђују. У Четвртој глави дат је пример система за праћење трајекторије и резултати симулације.

II. Испитивање обвервабилности и конвергенције

За систем се каже да је потпуно обсервабилан ако се свака промена његовог стања одражава на свим излазним променљивим. Другим речима појам обсервабилности подразумева да се на бази посматрања вектора излаза, у току коначног броја периода одабирања, може одредити почетно стање система [5]. Разматра се временски дискретан линеарни динамички систем са Марковљевим скакањем *(Discrete-time dynamic jump-Markov linear system-MJLS*). Овакав систем се у дискретном временском интервалу k може описати помоћу следећих једначина [6]:

$$x(k) = f[x(k-1), u(k); \phi(k)] \tag{2.1}$$

$$y(k) = g[x(k-1), u(k); \phi(k)] + w(k) \tag{2.2}$$

где је $x(k) \in \mathbf{R}^N$ вектор стања, $y(k) \in \mathbf{R}^M$ је излаз, $u(k) \in \mathbf{R}^J$ је улаз, $w(k)$ је вектор белог шума $w(k) \in \mathbf{R}^M$, $\phi(k)$ је временски променљив параметар који узима вредности из познатог скупа $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, ..., m_N\}$ и варира узимањем вредности из Марковљевог ланца који је описан преко матрице вероватноће прелаза из неког стања у стање Π .

$$\Pi_{ij}(k|k-1) = P\{m_j(k)|m_i(k-1)\} \tag{2.3}$$

На почетку, за овакав систем може се дефинисати обсервабилност на следећи начин.

Дефиниција 1: *Обсервабилност временски дискретног стохастичког линеарног хибридног система:* Временски дискретан стохастички линеарни хибридни систем $\mathbf{H}$ је обсервабилан на интервалу $[k_0, k_0 + L]$ ако се хибридно стање дефинисано као $[m_i(k), x(k)]$ у истом интервалу, може дефинисати једнозначно (за случај када сви вектори *x(k)* имају јединствену расподелу вероватноћа) из секвенце излазних сигнала $Y(L) = \left[y^T(k_0) \quad \cdots \quad y^T(k_0 + L)\right]^T$ [6].

У сваком временском интервалу одрђују се они елемене скупа $\mathbf{M}$ који најбоље "прате" секвенцу улазних мерења $Y^k = \{y(1), y(2), ..., y(k)\}$. У раду је презентован алгоритам који решава овај проблем. Посматрајмо скуп модела који се може изразити помоћу следећих рекурзивних једначина :

$$x^\nu(k) = f[x^\nu(k-1), u(k); m_\nu] \tag{2.4}$$

$$y^\nu(k) = g[x^\nu(k-1), u(k); m_\nu] \tag{2.5}$$

где је $\nu = 1, 2, ..., N$ редни број модела. Једначине (2.4) и (2.5) описују систем дат једначинама (2.1) и (2.2) али без утицаја шума. Алгоритам естимације се заснива на следећој идеји: ако $\phi(k) = m_\nu$ за неки

З. Радосављевић, Војнотехнички Институт Београд, Ратка Ресановића 6б, 11030 Београд, Србија; (e-mail: zvonko.radosavljevic@etf.bg.ac.yu).

временски интерал тада $y^{\nu}(k)$ даје бољу естимацију него $y(k)$. Ова идеја се може формализовати увођењем нове функције за сваку вредност ν. На тај начин се уводи нови временски корак који узима вредности $1, L+1, 2L+1, \ldots$, док се нова временска промењљива може изразити као $t = \frac{k-1}{L} + 1$ [3]. Увођењем овакве конвенције обележавања временске промењљиве t, добијамо следеће нове релације између промењљивих:

$$\Phi(1) \equiv \phi(1), Y(1) \equiv [y(1), y(2), \ldots, y(L)]$$

$$Y^{\nu}(1) \equiv [y^{\nu}(1), y^{\nu}(2), \ldots, y^{\nu}(L)], \nu = 1,2,\ldots,N \qquad (2.6)$$

$$\Phi(2) \equiv \phi(L+1), Y(2) \equiv [y(L+1), y(L+2), \ldots, y(2L)],$$

$$Y^{\nu}(2) \equiv [y^{\nu}(L+1), y^{\nu}(L+2), \ldots, y^{\nu}(2L)], \nu = 1,2,\ldots,N \qquad (2.7)$$

при чему су почетне оригиналне вредности приказане малим словима. Посматрајмо сада следеће величине $\mu_{\nu}(t), \quad \nu = 1,2,\ldots,N, \quad t = 0,1,\ldots$ које се израчунавају рекурзивно, у складу са следећим једначинама:

$$\mu_{\nu}(t) = \frac{[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(t-1)\mathbf{\Pi}^{L}{}_{i\nu}] \cdot \exp[-\frac{\left|Y(t) - Y^{\nu}(t)\right|^2}{L\sigma^2}]}{\sum_{j=1}^{N}[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(t-1)\mathbf{\Pi}^{L}{}_{j\nu}] \cdot \exp[-\frac{\left|Y(t) - Y^{j}(t)\right|^2}{L\sigma^2}]} \qquad (2.8)$$

где је симбол $\left| \cdot \right|$ Еуклидово растојање вектора и $\mathbf{\Pi}^L$ означава L-ти степен матрице $\mathbf{\Pi}$, σ је параметар грешке; велика вредност параметра σ ублажава ефекат велике грешке по цену споријег добијања вредности $\mu_{\nu}(t)$ $(0 \le \mu_{\nu}(t) \le 1)$. Када параметар $\mu_{\nu}(t)$ узима велике вредности, тада $\Phi(t) = \phi(k)$ се одлично прилагођава на секвенцу улазних података $Y(t)$; када параметар $\mu_{\nu}(t)$ узима мале вредности, параметар $\Phi(t) = \phi(k)$ се лоше прилагођава на секвенцу улазних података $Y(t)$. Зато се параметар $\mu_{\nu}(t)$ уједно назива ***функцијом поверења***. Осим тога, велика вредност параметра $\mathbf{\Pi}^{L}_{j\nu}$ показује да су параметри m_i и m_{ν} усаглашени и међусобно се успешно смењују, с обзиром да само један од њих може бити активан у истом временском интервалу. Велике вредности члана $\exp[-\frac{\left|Y(t) - Y^{\nu}(t)\right|^2}{L\sigma^2}]$ имплицирају да је праметар m_{ν} добро усаглашен са $Y(t)$ на праћење улазне секвенце података у временском тренутку t. Коначно, потребно је добро изабрати естимацију [7].

$$\hat{\Phi}(t) = \arg\max_{m_{\nu} \in \mathbf{M}}[\mu_{\nu}(t)] \qquad (2.9)$$

Другим речима, у сваком временском интервалу t оптимална естимација посматране секвенце података $Y(1), \ldots, Y(t) = y(1), y(2), \ldots, y(tL)$, изискује ону вредност параметра $\hat{\Phi}(t)$, која максимизира вредност $\mu_{\nu}(t)$. Даље, дефинишимо величину $A_{\nu l}$ на граници интервала дефинисаности:

$$A_{\nu l} = \lim_{L \to \infty} \frac{\left|Y(t) - Y^{\nu}(t)\right|^2}{L\sigma^2} = \lim_{L \to \infty} \frac{\sum_{k=(t-1)L+1}^{tL}\left|y(k) - y^{\nu}(k)\right|^2}{L\sigma^2} \qquad (2.10)$$

Такође дефинишимо $\alpha_{\nu l} = \exp(-A_{\nu l})$, $0 < \alpha_{\nu l} < 1$ за све вредности ν, l. Сада се може дефинисати "пилот" функција, на основу функције дате једначином (2.8), којом се испитује конвергенција, помоћу израза :

$$p_{\nu}(t) = \frac{[\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\Pi_{\nu i}{}^{L}]\alpha_{\nu l}}{\sum_{j=1}^{N}[\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\Pi_{\nu i}{}^{L}]\alpha_{\nu j}} \qquad (2.11)$$

Претходна анализа даје неопходне критеријуме обсервабилности алгоритама естимације и има значајан утицај на дизајн система. Поред тога они се користе за у наставку поступка одређивања граничних вредности параметара који гарантују стабилност у ширем смислу односно конвергенцију у ужем смислу.

III. Конвергенција алгоритма

Теоријска основа конвергенције дата је у виду теореме. Уведимо сада нову детерминистичку величину $p_{\nu}(t)$ која је добијена на основу анализе понашања $\mu_{\nu}(t)$. Она је одабрана тако да апроксимира случајну величину $\mu_{\nu}(t)$.

Теорема 1: *Посматрајмо систем дефинисан једначином (2.11) са* $\alpha_{\nu l} = \exp(-A_{\nu l})$, *за* $\nu, l = 1,2,\ldots,N$. *Под претпоставком да је* $1 \le l \le N$ *фиксно, и ако важи* $\mathbf{\Pi}_{\nu j}{}^{L} > 0$ *за* $\nu, j = 1,2,\ldots,N$ *постоји неко* $\varepsilon > 0$ *тако да за свако* ν *важи* $\mathbf{\Pi}_{\nu\nu}{}^{L} > 1 - \varepsilon$ *и за* $j \ne \nu$ $\mathbf{\Pi}_{\nu j}{}^{L} < \varepsilon$, *и ако за свако* $\nu \ne l$ *ми имамо да је* $\frac{1 + N\varepsilon}{1 - \varepsilon} < \frac{\alpha_{ll}}{\alpha_{\nu l}}$ *тада важи теорема:* $\lim_{t \to \infty} p_{\nu}(t)$ *постоји за* $\nu = 1,2,\ldots,N$ *и* $\lim_{t \to \infty} p_l(t) > \lim_{t \to \infty} p_{\nu}(t)$ *за сваки* $\nu \ne l$ [3].

Доказ теореме дат је у [3]. Из теореме се могу извести следеће тврдње:

1. Под условом да је параметар фиксиран на вредност m_l сваки $p_{\nu}(t)$ конвергира ка некој коначној граничној вредности. Велике граничне вредности су аналогне стварним вредностима параметра m_l. Из тог разлога, ако m_l остаје фиксно у довољно великом времену. Тако $p_l(t)$ може бити веће од свих $p_{\nu}(t)$, за $j \ne l$. Ако $\frac{1 + N\varepsilon}{1 - \varepsilon} < \frac{\alpha_{ll}}{\alpha_{\nu l}}$ важи за свако l, и ако су интервали између смене параметара довољно велики, тада је конвергенција гарантована за сваки временски интервал и сваку вредност параметра m_l.

2. Услов $\mathbf{\Pi}_{\nu j}{}^{L} > 0$. То значи да нема неподешених параметара, док $\mathbf{\Pi}_{\nu\nu}{}^L > 1-\varepsilon$ и $\mathbf{\Pi}_{\nu j}{}^L < \varepsilon$ је услов споре промене параметара, ако је $\mathbf{\Pi}_{jj}{}^L > \mathbf{\Pi}_{j\nu}{}^L$. Даље, захтева се да за фиксно l и сваки $j \neq l$ важи неједначина: $\frac{1+N\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{\alpha_{ll}}{\alpha_{\nu l}}$. Ово је уједно најважнији услов за конвергенцију. $\alpha_{\nu l}$ изражава експоненцијалну грешку параметра, када је активан параметар m_l. Конвергенција према стварној вредности параметра m_l даје мању вредност средње грешке, т.ј. $1 < \frac{\alpha_{ll}}{\alpha_{\nu l}}$ за све $l \neq \nu$. Услов који је овде предложен је понекад јачи од $1 < \frac{1+N\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Претпоставимо да је за неки временски интервал активан параметар m_0, изван унапред дефинисаног скупа $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, ..., m_N\}$. Међутим постоји такво l тако да за свако $l \neq j$ важи $\frac{1+N\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{\alpha_{ll}}{\alpha_{jl}}$. Алгоритам "бира" вредности које дају најбоље резултате естимације улазне секвенце. Идеја предложене методе је коришћење неке генерално једноставније функције уместо експоненцијалне функције грешке, $\exp[-\frac{|Y(t)-Y^\nu(t)|^2}{L\sigma^2}]$.

A. Анализа предложене функције грешке

Из претходног се може закључити да се од предложене функције $f = f[|Y(t)-Y^\nu(t)|]$ захтева да буде монотоно опадајућа. Логичан избор је најједноставнија за израчунавање инверзна функција $\alpha^0{}_{\nu l} = 1/(1+A_{\nu l})$ која је дефинисана за све вредности параметра $A_{\nu l} > 0$. Сада се формира нова функција поверења $\mu^0{}_\nu(t)$, на основу (2.8) дата као:

$$\mu^0{}_\nu(t) = \frac{[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(t-1)\mathbf{\Pi}^L{}_{i\nu}]\cdot[\frac{1}{1+\frac{|Y(t)-Y^\nu(t)|^2}{L\sigma^2}}]}{\sum_{j=1}^{N}[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(t-1)\mathbf{\Pi}^L{}_{j\nu}]\cdot[\frac{1}{1+\frac{|Y(t)-Y^j(t)|^2}{L\sigma^2}}]} \tag{3.1}$$

односно пилот функција $p^0{}_\nu(t)$, на основу (2.11)

$$p^0{}_\nu(t) = \frac{[\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\Pi_{\nu i}{}^L]\alpha^0{}_{\nu l}}{\sum_{j=1}^{N}[\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\Pi_{\nu i}{}^L]\alpha^0{}_{\nu j}} \tag{3.2}$$

Посматрајмо однос $p^0{}_\nu(t)$ и $\pi^0{}_\nu(t)$ и претпоставимо да су l и L фиксни, и $A_{\nu l} \cong \frac{|Y(t)-Y^\nu(t)|^2}{L\sigma^2}$ за $\nu = 1,2,...,N$. Ова тврдња је истинита ако је систем ергодичан у будућности и ако је L довољно велико и да конвергенција $p^0{}_\nu(t)$ (која се гарантује теоремом) узима вредности унутар временског интервала T_c. На крају претпоставимо да систем функционише са фиксним параметрима m_l у интервалу времена T_s. Ако је $L \le T_s \le T_c$ тада је логично да $\pi^0{}_\nu(t)$ се апроксимира са $p^0{}_\nu(t)$. Експеримент који следи треба да покаже оправданост тврдњи изнетих у теореми, поготово на границама области дефинисаности, односно за њене минималне и максималне вредности. Ако вредности свих параметара алгоритма остају фиксне (нпр. m_i) током трајања експеримента, док *функција поверења* има особину: $\mu^0{}_i(t) > \mu^0{}_j(t)$ за $i \neq j$ тада се осигурава коректна естимација параметара. Сада треба доказати да $p^0{}_\nu(t)$ има жељено понашање у области дефинисаности функције. Нарочито треба показати да овај параметар добро естимира функцију поверења на границама дефинисаности, из чега се могу извести гранични услови. Претпоставимо да су у будућности вредности параметара алгоритма фиксне. т.ј. да је $\Phi(t) = m_l$. На крају, услов конвергентности алгоритма може се поистоветити са доказом да $p^0{}_\nu(t)$ за $\nu = 1,...,N$ конвергира, који је уједно закључак наведене теореме.

IV. Резултати симулација

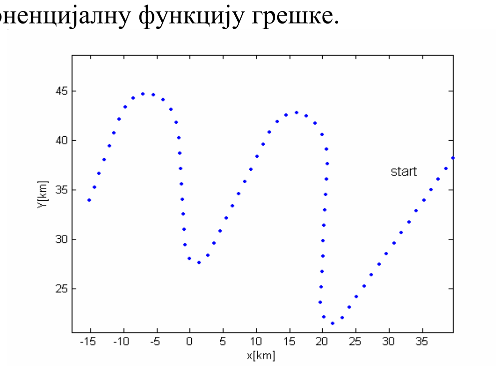
Описани критеријуми испитивања контролабилности и обсервабилности динамичког дискретног система испитани су на примеру праћења путање кретања борбеног авиона помоћу познатог ИММ алгоритма (*IMM-Interacting Multiple Model*) [8,9] са два модела Калманових филтара. Модели су одабрани према два дискретна модела кретања, оба са маневром авиона али са различитим угаоним брзинама, први са угаоном бризином од $2^\circ/s$ и други са угаоном брзином од $5^\circ/s$. Изглед тестиране трајекторије дат је на Сл.1. Трајање симулације је 80 скенова. Периода скенирања осматрачког радара је 5s. Резултати симулација су дати на Сл.2. и Сл.3. а представљају конвергентност ИММ методе при праћењу путање авиона са различитим нивоом шума у границама $\sigma = 0.01 - 0.5$ и *L=20* (почетак 20. скен), и упоредни график конвергенције параметара за експоненцијалну и предложену инверзну функцију грешке, респективно. Кинематичке једначине кретања авиона који врши маневар су дате помоћу следећих једначина:

$$x(k)=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sin\omega t}{\omega} & 0 & -\frac{1-\cos\omega t}{\omega}\\ 0 & \cos\omega t & 0 & -\sin\omega t\\ 0 & \frac{1-\cos\omega t}{\omega} & 1 & \frac{\sin\omega t}{\omega}\\ 1 & \sin\omega t & 0 & \cos\omega t\end{bmatrix}x(k-1) \qquad (4.1)$$

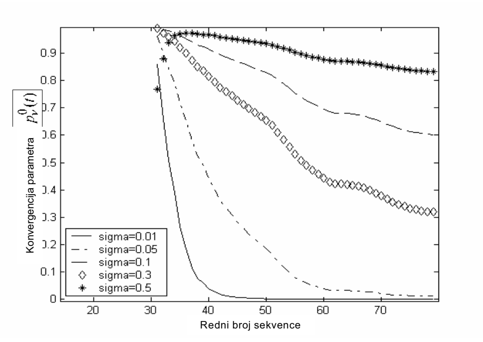
$$+\begin{bmatrix}\frac{T^2}{2} & T & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T\end{bmatrix}u(k-1)+w(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x(k)+v(k) \qquad (4.2)$$

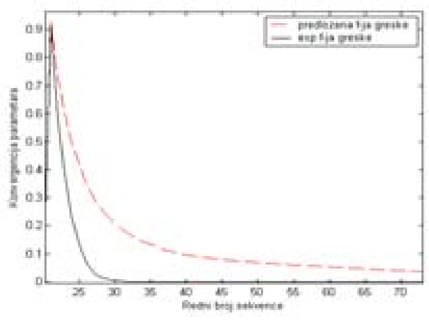
где је $x=\begin{bmatrix}x_1 & \dot{x}_1 & x_2 & \dot{x}_2\end{bmatrix}$, x_1, x_2 координате позиције, $u=\begin{bmatrix}u_1 & u_2\end{bmatrix}^T, u_1, u_2$ компоненте брзине, ω угаона брзина, w шум процеса, v је шум мерења. На Сл. 2. дат је расподела коефицијента $p^0{}_v(t)$ у зависноси од редног броја секвенце временског одбирка. Параметри су дужина временске секвенце опсервирања система и стандардна девијација грешке праћења трајекторије авиона. Симулациони резултати су добијени применом *Теореме 1.* показују да тестирани алгоритам брже конвергира када расте грешка праћења позиције, која је изражена преко σ . Резултати упоредне анализе са Сл.3. показују да предложена функција добро прати експоненцијалну функцију грешке.



Сл.1. Путања борбеног авиона



Сл.2. Приказ конвергенције тестираног алгоритма



Сл.3. Упоредни дијаграм конвергенције параметара експоненцијалне и предложене функције грешке

V. Закључак и даља истраживања

Базирана на познатој теореми [3] а полазећи од услова обсервабилности динамичких система, тестирана је метода за испитивање конвергенције стохастичких линеарних динамичких система на познатом естиматору стања. Симулациони резултати су показали да предложена метода са експоненцијалном функцијом грешке на познатом естиматору стања за праћење трајекторије борбених авиона, даје добре резултате.У следећој фази биће примењена иста метода за испитивање конвергенције параметара на модификованом адаптивном ИММ алгоритму. Испитан је утицај појединих параметара на бржу конвергентност система и дате су оптималне вредности појединих параметара који директно утичу на ефикасност методе.

Литература

[1] A. Alessandri and P. Coletta. Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems. In M. D. DiBenedetto and A. Sangiovanni-Vincentelli, editors, *Hybrid Systems: Computation and Control. LNCS*, Vol.2034, pages 7–18. Springer-Verlag, 2001.

[2] A. Bemporad, G. Ferrari, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10):1864–1876, 2000.

[3] Petridis, V., and Kehagias, A. A multi-model algorithm for parameter estimation of time varying nonlinear systems. *Automatica*, 34 (1998), 469—475.

[4] X. R. Li, V.P. Jilkov, Survey of Maneuvering Target Tracking. Part V: Multiple-Model Methods, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems Vol. 41*, no. 4 october 2005, pp.1235:1321.

[5] M. Stojic, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Gradjevinska Knjiga, Beograd 1978.

[6] Hwang, I., Balakrishnan, I., and Tomlin, C. Observability criteria and estimator design for stochastic linear hybrid systems. In *Proceedings of the IEE European Control Conference,* Cambridge, UK, Sept. 2003.

[7] Jilkov, V. P., and Li, X. R. Adaptation of transition probability matrix for multiple model estimators. In *Proceedings of the 2001 International Conference on Information Fusion*, Montreal, QC, Canada, Aug. 2001, ThB1.3—ThB1.10.

[8] R. Vidal, A. Chiuso, and S. Soatto. Observability and identifiability of jump linear systems. In *Proceedings of the* 41*th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas,NV, December 2002.

[9] H.A.P. Blom, Y.Bar-Shalom, The Interacting Multiple-Model algorithm for systems with Markovian switching cpefficients, *IEEE Trans. on Automatic Control Vol.6*, no.6 pp.1235:1321. October 1970.

Abstract

A stochastic linear hybrid system is observable if the hybrid state of the system can be uniquely determined from its output. In this paper, conditions for the observability and convergence of linear hybrid systems using the information obtained from system characteristics are defined. Having established the criteria for the observability and convergence the effect of these conditions on estimator design, and also finding of bounds on the switching times of the system to achieve guaranteed estimator performance is presented. This result is applied to the estimation of a two-mode aircraft trajectory with use IMM method and proved good efficacy of algorithm.

AN EXAMPLE OF CONVERGENCE TESTING FOR THE TARGET TRACKING LINEAR HYBRID SYSTEM

Zvonko Radosavljevic